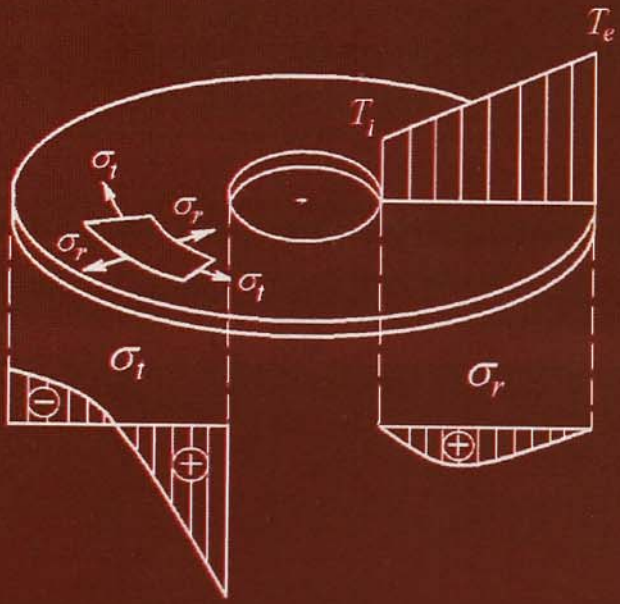
MIRCEA RADEŞ

TENSIUNI TERMICE



Editura
PRINTECH

MIRCEA RADEŞ

TENSIUNI TERMICE

Editura Printech
2010

Prefață

Lucrarea se bazează pe cursul *Tensiuni termice* predat studenților masteranzi de la Facultatea de Inginerie Mecanică şi Mecatronică, la Universitatea Politehnica Bucureşti.

Materialul prezentat se limitează la fenomene în care problema termoelastică este decuplată de problema transferului de căldură. Deşi tensiuni termice de valori mari sunt produse de câmpuri de temperaturi tranzitorii şi cu variație rapidă în timp, în curs se tratează cu precădere tensiunile produse de câmpuri staționare de temperaturi în materiale izotrope.

Având în vedere bugetul de timp limitat, prezentarea se limitează la fenomene termoelastice. Nu se tratează fenomene termoplastice, tensiuni produse de fluaj, tensiuni remanente sau tensiuni produse de şocuri termice.

Se presupune că cititorul este familiarizat cu noțiunile de bază din Rezistența materialelor şi Analiza cu elemente finite. Se prezintă principalele rezultate clasice, care conduc la soluții "închise", pentru a oferi o imagine de ansamblu asupra distribuției tensiunilor termice în diferite elemente structurale: bare şi sisteme de bare, plăci plane subțiri, cilindri şi discuri axial-simetrice, învelişuri subțiri. În fiecare caz, se fac referiri la utilizarea metodei forțelor termoelastice echivalente, prin care problema termoelastică este redusă la o problemă clasică de Teoria elasticității sau Rezistența materialelor.

Cazurile tratate se rezumă la distribuții axial-simetrice ale temperaturii pentru cilindri şi discuri axial-simetrice, la distribuții liniare pe grosimea plăcilor şi învelişurilor, şi la distribuții constante în lungul barelor, care diferă de distribuția reală. Problemele practice se rezolvă utilizând programe de calcul cu elemente finite, precedate de studiul transferului termic pe un model cu aceeaşi rețea de discretizare, pentru determinarea câmpului de temperaturi. Utilizarea acestora depăşeşte cadrul acestui curs.

Cursul urmăreşte a) descrierea fenomenelor termomecanice întâlnite în practica inginerească; b) calculul tensiunilor şi deformațiilor termice în elemente structurale; şi c) înarmarea studenților cu baza fizică necesară în modelarea analitică şi numerică a structurilor cu efecte termice, pentru elaborarea soluțiilor inginereşti ale problemelor termoelastice.

Iunie 2010 Mircea Radeş

Cuprins

Prefață **i**

Cuprins **iii**

1. Fenomene termomecanice **1**

1.1 Natura tensiunilor termice 1

1.2 Ipoteze de bază 1

1.3 Analiza termoelastică 2

1.4 Domenii de interes 3

1.5 Scurt istoric 5

2. Bare solicitate axial **7**

2.1 Deformații specifice termice libere 7

2.2 Deformații specifice termoelastice 9

2.3 Legea lui Hooke cu efecte termoelastice 9

2.4 Dilatarea împiedicată 10

2.5 Forțe axiale termoelastice 12

2.6 Metoda lui Duhamel 13

2.7 Sisteme de bare articulate la capete 16

2.7.1 Rezolvarea prin metoda lui Duhamel 17

2.7.2 Rezolvarea prin metoda Mohr-Maxwell 23

2.8 Bare cu secțiune eterogenă simetrică 25

2.9 Dilatarea parțial împiedicată 29

2.10 Bare cu secțiune variabilă 31

3. Bare solicitate la încovoiere **33**

3.1 Bare drepte omogene 33

3.1.1 Bara cu sarcini exterioare 33

3.1.2 Bara liberă la capete 38

3.1.3 Metoda lui Duhamel 39

3.1.4 Bare cu secțiune simetrică 39
3.1.5 Deformații termice ale barelor drepte 44
3.2 Lamele bimetalice 46
3.2.1 Principiul constructiv 47
3.2.2 Calculul parametrilor termici 47
3.2.3 Curbura specifică 52
3.2.4 Alungirea specifică 53
3.2.5 Săgeata termică 54
3.2.6 Tensiuni termice 56
3.3 Bare curbe omogene 57
3.4 Bare şi cadre static nedeterminate 59
4. Ecuațiile termoelasticității pentru corpuri izotrope 63
4.1 Ecuațiile de echilibru 63
4.2 Ecuațiile de compatibilitate 65
4.3 Ecuațiile constitutive 66
4.4 Ecuațiile fundamentale ale termoelasticității 68
4.1.1 Ecuațiile exprimate în funcție de deplasări 68
4.1.2 Ecuațiile exprimate în funcție de tensiuni 69
4.5 Probleme bidimensionale 70
4.5.1 Starea plană de deformații specifice 71
4.5.2 Starea plană de tensiuni 73
4.5.3 Conversia ecuațiilor între cele două stări plane 75
4.6 Principiul metodei lui Duhamel 76
4.7 Forma matricială a ecuațiilor constitutive 78
4.7.1 Notații matriciale 78
4.7.2 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice 78
4.8 Considerații generale 80
5. Cilindri şi discuri axial-simetrice 81
5.1 Ecuațiile fundamentale 81
5.1.1 Ecuația de echilibru 82
5.1.2 Relațiile între deformații specifice şi deplasări 82
5.1.3 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice 83
5.1.4 Condițiile la limită 83

5.2 Cilindri groşi 84
5.2.1 Câmp termic axial-simetric 84
5.2.2 Câmp termic axial nesimetric 90
5.3 Tuburi nesolicitate termic 91
5.3.1 Ecuațiile lui Lamé 91
5.3.2 Tub cu presiune interioară 92
5.3.3 Tub cu presiune exterioară 94
5.4 Cilindri subțiri şi țevi 95
5.4.1 Distribuție logaritmică a temperaturii 95
5.4.2 Distribuție liniară a temperaturii 96
5.4.3 Câmp termic axial nesimetric 97
5.5 Cilindri plini 98
5.6 Discuri cu grosimea constantă, în repaus 99
5.6.1 Discul cu gaură concentrică 99
5.6.2 Discul plin 105
5.7 Cilindri concentrici din două materiale 110
6. Discuri şi cilindri în rotație 115
6.1 Ecuațiile fundamentale ale discurilor în rotație 115
6.1.1 Ecuația de echilibru 115
6.1.2 Relațiile între deformații specifice şi deplasări 117
6.1.3 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice 117
6.1.4 Condițiile la limită 117
6.2 Discuri cu grosimea constantă 118
6.2.1 Soluția generală 118
6.2.2 Discuri fără efecte termice 123
6.3 Discuri cu grosimea variabilă 127
6.3.1 Metoda celor două calcule 130
6.3.2 Metoda diferențelor finite 135
6.4 Cilindri în rotație 140
6.4.1 Soluția generală 142
6.4.2 Cilindrul cu gaură centrală 143
6.4.3 Cilindrul plin 145
6.4.4 Simulări numerice 146

7 Plăci plane subțiri **151**

7.1 Ipotezele încovoierii plăcilor subțiri 151

7.2 Încovoierea axial-simetrică a plăcilor circulare 152

7.2.1 Geometria suprafeței mediane 152

7.2.2 Relațiile între deformații specifice şi deplasări 154

7.2.3 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice 154

7.2.4 Relațiile de echivalență între momente şi tensiuni 155

7.2.5 Ecuațiile de echilibru 156

7.2.6 Ecuația înclinării normalei 158

7.2.7 Condițiile la limită 159

7.2.8 Plăci cu tensiuni de membrană 159

7.2.9 Plăci circulare pline 161

7.2.10 Plăci inelare 163

7.2.11 Plăci nesolicitate termic 169

7.3 Încovoierea plăcilor dreptunghiulare 177

7.3.1 Geometria suprafeței mediane 177

7.3.2 Relațiile între deformații specifice şi deplasări 179

7.3.3 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice 180

7.3.4 Relațiile de echivalență între momente şi tensiuni 181

7.3.5 Ecuațiile de echilibru 182

7.3.6 Ecuația săgeții plăcii 184

7.3.7 Condițiile la limită 184

7.3.8 Reducerea încovoierii plăcii la deformarea unei membrane 187

7.3.9 Plăci simplu rezemate încălzite neuniform 189

8 Învelişuri cilindrice **193**

8.1 Ipoteze de bază 193

8.2 Relațiile între deformații specifice şi deplasări 194

8.3 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice 195

8.4 Relațiile între eforturi şi tensiuni 196

8.5 Ecuațiile de echilibru 198

8.6 Ecuația deplasării radiale 199

8.7 Tensiuni normale 199

8.8 Soluția ecuației deplasării radiale 200

8.9 Condițiile la limită 201
8.10 Metoda parametrilor inițiali 203
8.11 Aplicații numerice 204
9 Analiza cu elemente finite 209
9.1 Metoda elementelor finite 209
9.1.1 Discretizarea 210
9.1.2 Funcțiile de formă 210
9.1.3 Compatibilitatea deformațiilor specifice cu deplasările nodale 211
9.1.4 Energia de deformație 211
9.1.5 Vectorul forțelor termoelastice 212
9.1.6 Ecuațiile de echilibru 213
9.1.7 Asamblarea matricii globale de rigiditate şi a vectorului global al forțelor nodale 214
9.1.8 Calculul tensiunilor 215
9.2 Calculul tensiunilor termice prin MEF 215
9.3 Structuri plane din bare solicitate axial 215
9.3.1 Calcule în coordonate locale 216
9.3.2 Transformarea din coordonate locale în coordonate globale 217
9.3.3 Matricea de rigiditate în coordonate globale 219
9.3.4 Vectorul forțelor termoelastice în coordonate globale 220
9.3.5 Asamblarea matricii globale de rigiditate şi a vectorului global al forțelor nodale 220
9.3.6 Forțele axiale în bare şi tensiunile 220
9.4 Plăci subțiri cu sarcini coplanare 225
9.4.1 Modelarea cu elemente CST 225
9.4.2 Matricea [*B*] 226
9.4.3 Matricea de rigiditate a elementului 227
9.4.4 Vectorul forțelor termoelastice al elementului 227
9.4.5 Asamblarea matricii globale de rigiditate şi a vectorului global al forțelor nodale 228
9.4.6 Calculul tensiunilor 228
9.5 Structuri axial-simetrice încăcate simetric 233
9.5.1 Relațiile între deformații specifice şi deplasări 233
9.5.2 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice 234
9.5.3 Energia potențială totală 235

9.5.4 Modelarea cu elemente finite CST axial-simetrice 236
9.5.5 Coordonate naturale 236
9.5.6 Funcțiile de formă 237
9.5.7 Câmpul de deplasări 237
9.5.8 Transformări între coordonate naturale şi coordonate fizice 238
9.5.9 Matricea [*B*] 239
9.5.10 Energia de deformație a elementului 240
9.5.11 Matricea de rigiditate a elementului 241
9.5.12 Vectorul forțelor termoelastice 242
9.5.13 Asamblarea şi calculul tensiunilor 242
9.6 Pereți membrană la cazane de abur 242
Bibliografie 249
Index 257

1.
FENOMENE TERMOMECANICE

Tensiunile termice, uneori denumite tensiuni “termomecanice”, apar datorită interacțiunii corpurilor deformabile cu câmpul de temperaturi rezultat în urma transferului termic (încălzire sau răcire). În corpuri libere, acestea sunt tensiuni autoechilibrate produse de distribuția neuniformă a temperaturii sau de valori diferite ale coeficienților de dilatare termică.

1.1 Natura tensiunilor termice

Un corp elastic omogen neconstrâns, încălzit uniform, se dilată liber. Variația temperaturii corpului produce alungiri specifice termice, fără să genereze tensiuni termice.

În corpurile din materiale izotrope, tensiunile termice apar în două cazuri: a) dacă dilatarea produsă de încăzirea uniformă este împiedicată (cazul sistemelor static nedeterminate), sau b) dacă încălzirea produce un câmp neuniform de temperaturi (variabil pe grosimea barelor, plăcilor, tuburilor, sau în părți diferite ale sistemului elastic). Tensiuni termice apar şi în materiale anizotrope, în bare sandvici cu secțiuni nesimetrice şi în plăci compozite, chiar într-un câmp uniform de temperaturi.

Dilatările termice determină alungiri specifice care se adaugă alungirilor specifice mecanice şi produc tensiuni normale.

1.2 Ipoteze de bază

În general se consideră că tensiunile termice nu influențează câmpul de temperaturi, alungirile specifice calculându-se prin suprapunere liniară, adăugând alungirile specifice termice la cele datorite tensiunilor normale produse de sarcinile exterioare. Prin aceasta se decuplează problema termoelastică de problema

transferului de căldură. Câmpul de temperaturi este determinat independent de orice considerare a tensiunilor şi deformaţiilor, iar distribuţia de tensiuni şi deformaţii specifice joacă un rol neglijabil în influenţarea câmpului de temperaturi.

Luând în considerare factorul timp, procesele termice produc trei categorii principale de câmpuri de temperaturi: a) staţionare (constante în timp), b) cu variaţii rapide în timp (tranzitorii sau şoc termic), şi c) variabile periodice (producând oboseala termică a materialelor). În continuare se vor analiza numai tensiunile termice produse de câmpuri staţionare sau cvasistaţionare de temperatură. Ca urmare, în ecuaţiile de echilibru nu apar forţe de inerţie produse de variaţia temperaturii.

În funcţie de distribuţia spaţială a câmpurilor de temperaturi, se disting: a) câmpuri uniforme (distribuţie constantă), şi b) câmpuri neuniforme (distribuţie variabilă pe o anumită direcţie). În acest curs introductiv se calculează cu precădere tensiunile termice produse de câmpuri neuniforme staţionare.

În general, ordinul de mărime al tensiunilor termice poate fi reprezentat de valorile tensiunilor necesare pentru a anula complet dilatarea termică liberă. Într-o bară fixată la capete, în câmp uniform de temperaturi, pentru a bloca dilatarea axială liniară trebuie aplicate tensiuni de compresiune $E\alpha T$, unde E este modulul de elasticitate longitudinal şi α este coeficientul de dilatare termică liniară. În alte cazuri, tensiunile termice maxime sunt $kE\alpha T$, unde $k = 0{,}5 - 2{,}5$ iar T este variaţia temperaturii sau cea mai mare diferenţă de temperaturi între două părţi diferite ale corpului.

În oţel, produsul $E\alpha T \cong 2{,}5T$ $\mathrm{N/mm^2}$, unde T este exprimată în grade Celsius. Rezultă că o limită de curgere de 250 $\mathrm{N/mm^2}$ poate fi atinsă atunci când în material există o diferenţă de temperatură de $100^{o}\mathrm{C}$, sau când dilatarea produsă de această variaţie a temperaturii este împiedicată. În acest domeniu, variaţia cu temperatura a modulului de elasticitate al materialului poate fi neglijată.

Se vor considera numai corpuri deformabile izotrope, omogene sau eterogene, solicitate în domeniul elastic, având coeficientul de dilatare termică liniară constant, independent de temperatură. Tensiunile remanente produse de solicitări elasto-plastice şi tensiunile termice din materiale compozite nu fac obiectul acestei prezentări.

1.3 Analiza termoelastică

Tensiunile termice se calculează prin două metode: a) *metoda directă*, bazată pe ecuaţiile termoelasticităţii, şi b) *metoda forţelor termoelastice echivalente* (J. M. C. Duhamel, 1838), care reduce problema termoelastică la o

problemă clasică de Teoria elasticității sau Rezistența materialelor, aplicând sarcini (volumice şi/sau pe contur) egale şi de sens contrar celor care ar bloca total deformațiile termice ale corpului elastic (metoda “bridării”).

În general, la rezolvarea unei probleme static nedeterminate se stabilesc patru tipuri de ecuații: a) ecuații de echilibru; b) ecuații de compatibilitate (şi relații între deformații specifice şi deplasări); c) ecuații constitutive (în cazurile tratate aici – legea lui Hooke) şi d) condiții la limită. Pentru a lua în considerare efectele termice, se modifică numai ecuațiile constitutive, în care se introduc deformațiile specifice termice, care se însumează liniar cu cele produse sub acțiunea sarcinilor exterioare.

În metoda directă, efectele termice sunt incluse în condițiile de deformație. Aplicațiile simple se rezolvă cu *metoda forțelor*, utilizând ecuațiile de echilibru şi exprimând condițiile de deformație în funcție de forțe.

În metoda “bridării” (blocării) se parcurg trei etape:

1. Se presupune că deformațiile termice sunt blocate de un sistem de tensiuni convenabil ales şi se evaluează eforturile corespunzătoare.

2. Pe lângă forțele exterioare (dacă există), se aplică aceleiaşi structuri, nesupuse la câmpul de temperaturi, un sistem de forțe inverse (egale şi de sens contrar) celor aplicate la (1). Se calculează tensiunile şi deformațiile produse de aceste forțe.

3. Se suprapun stările (1) şi (2). Tensiunile se obțin prin însumare. Deplasările reale sunt cele calculate la (2).

Calculul tensiunilor termice prin metoda elementelor finite se face prin a doua metodă, indiferent de tipul de element finit utilizat. Întrucât metoda operează cu mărimi calculate în nodurile rețelei de discretizare (temperaturi nodale, deplasări nodale, forțe nodale echivalente), se poate utiliza acelaşi model cu elemente finite pentru calculul temperaturilor nodale şi pentru calculul tensiunilor termice, aplicând forțele termoelastice, de blocare a deplasărilor termice ale nodurilor, ca forțe exterioare în nodurile rețelei.

1.4 Domenii de interes

Tensiuni termice importante apar în instalații termice, cazane şi schimbătoare de căldură, la turbine cu gaze şi abur, în piesele motoarelor cu ardere internă şi compresoarelor, în scuturi termice la rachete şi avioane, în coşuri de fum, în construcții expuse la căldura solară, în pavaje şi acoperiri asfaltice, în plombe dentare şi multe alte aplicații.

Cămaşa cilindrului unui motor cu ardere internă este încălzită la interior de gazele arse şi răcită la exterior de fluidul de răcire. Când motorul funcționează la

sarcină şi turaţie constante, apar tensiuni termice staţionare. La interiorul cilindrului iau naştere tensiuni de compresiune, iar la exterior – tensiuni de întindere. La pornirea şi oprirea motorului, cât şi la modificarea sarcinii sau turaţiei acestuia, apar tensiuni termice cvasistaţionare. Oscilaţiile temperaturii în timpul ciclului de funcţionare al motorului produc tensiuni termice periodice.

Piesele cele mai solicitate termic sunt blocul cilindrilor, chiulasa, camera de ardere, supapele, pistonul şi segmenţii. Partea cea mai solicitată termic a chiulaselor motoarelor în patru timpi este puntea dintre supape. Diferenţe de temperatură de $50^0 C$ produc tensiuni de ordinul a $70\ MPa$ care cresc la $100\ MPa$ în cazul împiedicării dilatării. În capul pistonului, asimilat uneori cu o placă circulară simetrică, se dezvoltă tensiuni de ordinul $5\ MPa/100^0 C$ în aluminiu.

Tensiuni termice importante apar în sistemul conductelor de evacuare a gazelor la automobile, în special datorită dilatărilor împiedicate parţial, în colectorul şi galeriile de evacuare, legătura catalizator-ţeava de evacuare, toba de eşapament, având în vedere că temperatura gazelor de evacuare depăşeşte $1000^0 C$.

La cazane de abur, părţi solicitate termic sunt pereţii membrană şi tamburii. Peretele membrană se obţine prin sudarea pe generatoare a ţevilor prin intermediul unor platbenzi. Ţevile sunt conectate între ele şi fac parte din circuitul apă-abur sub presiune al cazanului. Carcasa membrană se compune din ecranele de radiaţie ale focarelor şi pereţii de închidere a drumurilor convective.

În secţiunea peretelui membrană, câmpul termic este rezultatul transferului de căldură prin conducţie între suprafaţa exterioară, încălzită prin radiaţie şi convecţie de la gazele de ardere, şi cea interioară, răcită de apă sau abur. În afara solicitărilor termice, pereţii membrană suportă sarcini mecanice importante rezultate din greutatea lor, a apei şi a altor elemente constructive, sarcini rezultând din presiunea mediului de răcire care curge prin ţevi, din presiunea gazelor de ardere aflate în interiorul carcasei membrană, precum şi sarcini dinamice generate de vibraţiile volumelor de gaze.

Calculul tensiunilor termice în pereţii membrană este o problemă dificilă datorită pe de o parte complexităţii modelelor fizice ale iradierii termice a ansamblului ţeavă-membrană, pentru determinarea câmpului asimetric de temperatură, pe de altă parte - conlucrării între tubul cu pereţi groşi al ţevii şi platbenzile adiacente.

La reactoare chimice şi schimbătoare de căldură interesează calculul tensiunilor termice în placa tubulară pentru fasciculul de ţevi, în special la reactorul cu apă grea presurizat.

Tensiuni termice foarte mari s-au înregistrat în scutul termic al navetei spaţiale datorită încălzirii aerodinamice la reintrare şi în scuturile termice ale camerelor de ardere ale turbinelor cu gaze.

Fiind un curs introductiv şi cu buget de timp limitat, lucrarea de faţă se limitează la calculul tensiunilor termice în domeniul elastic, denumite curent *tensiuni termoelastice*.

În multe aplicaţii practice acestea depăşesc limitele elastice ducând la fluaj sau ruperi. Un exemplu des întâlnit sunt crăpăturile în asfalt la temperaturi joase. Se apreciază că la scăderi de temperatură de la $5^0\mathrm{C}$ la $-30^0\mathrm{C}$, tensiunile din acoperiri asfaltice sunt de ordinul a $20\,\mathrm{MPa}$. La asfalturi se defineşte o temperatură critică, la care curgerea vâscoasă prin fluaj într-o oră egalează contracţia datorită variaţiei temperaturii într-o oră. La temperaturi mai mari ca cea critică, curgerea vâscoasă a materialului este suficientă să relaxeze tensiunile produse de contracţie. La temperaturi inferioare celei critice, tensiunile termice se dezvoltă mai repede decât poate relaxa curgerea vâscoasă şi pot apare crăpături.

Sunt cunoscute problemele care apar în construcţiile supuse la căldura solară. Dilatările şi contracţiile porţiunilor expuse variaţiei de temperatură sunt de ordinul $0{,}8\,\mathrm{MPa}/^0\mathrm{C}$. Geamul ferestrelor este încălzit sau răcit de radiaţia vizibilă sau infraroşie de la soare sau alte surse de căldură şi de convecţia naturală sau forţată de la vânt. Combinat cu dilatarea inegală a ramelor ferestrelor, fenomenul poate produce spargerea sticlei când tensiunile depăşesc $20\,\mathrm{MPa}$.

1.5 Scurt istoric

Primul studiu asupra tensiunilor termice făcut de J. M. C. Duhamel a fost citit în faţa Academiei de Ştiinţe Franceze în Paris la 23 februarie 1835 şi publicat în Journal de l'École Polytechnique în 1837.

De remarcat că tratatul lui J. B. J. Fourier asupra teoriei căldurii era deja publicat în 1822, iar lucrarea lui C. L. M. H. Navier asupra bazelor teoriei elasticităţii a fost citit la Academia de Ştiinţe Franceză în 14 mai 1821 şi publicat în 1827. Numit de Academie într-un colectiv de evaluare a unei lucrări a lui Navier asupra plăcilor, A. Cauchy a formulat în 1822 teoria generală a elasticităţii liniare în forma utilizată în prezent, cu tensiunile notate σ şi τ.

Studiul încovoierii plăcilor plane subţiri a fost iniţial inspirat de experienţele lui E. Chladni efectuate în 1787 asupra modurilor proprii de vibraţie ale acestora. În 1809 Academia de Ştiinţe Franceză a instituit un premiu pentru formularea unei teorii a vibraţiilor plăcilor, care, după unele controverse, a fost atribuit matematicienei Sophie Germain (1815). J. L. Lagrange, în calitate de membru al comitetului de atribuire a premiului, a corectat teoria Sophiei Germain şi a stabilit ecuaţia cu derivate parţiale în forma cunoscută în prezent. Lucrarea fundamentală a lui G. R. Kirchhoff, în care se introduce ipoteza normalei rectilinii şi se introduc condiţiile la limită naturale, a apărut abia în 1850, iar rezolvarea problemei lui Chladni a fost făcută de W. Ritz în 1908.

Formularea ecuațiilor termoelasticității a fost făcută de F. Neumann (1885), apoi de E. Almansi (1897), O. Tedone (1906) şi W. Voigt (1910). Primele lucrări au tratat probleme statice. Problemele de termoelasticitate au fost reduse la probleme de elasticitate clasică, pentru care s-au formulat soluții ale ecuațiilor lui Lamé în deplasări, când corpul este solicitat de forțe masice arbitrare.

Tensiunile care apar într-o placă răcită, ale cărei suprafețe sunt menținute la o temperatură constantă, au fost studiate de Rayleigh (1901). Variația în timp a tensiunilor termice dintr-un cilindru, la care temperatura suprafeței exterioare scade brusc la zero, a fost studiată de A. Dinnik (1915) şi C. H. Lees (1922). Tensiunile termice radial-simetrice în sfere au fost studiate de F. Neumann (1841) şi J. Hopkinson (1879).

În volumul 5 al cursului de Mecanică tehnică, A. Föppl (1907) menționează că expresiile tensiunilor termice în tubul cu pereți groşi apar pentru prima dată în teza de doctorat a lui M. T. Huber (autorul teoriei de rezistență bazată pe energia de variație a formei) în 1904, unde se fac şi particularizări pentru cilindrii cu pereți subțiri. Deoarece lucrarea lui Huber, scrisă în limba poloneză, a avut o accesibilitate limitată, Timoshenko atribuie această prioritate lui R. Lorenz (1907).

Multe probleme de tensiuni termice cu aplicații la componentele turbinelor cu abur şi cu gaze, sunt prezentate în cartea lui A. Stodola (1903) tradusă în limba engleză în 1905.

Monografii cunoscute asupra tensiunilor termice au fost scrise de B. E. Gatewood (1957), E. Melan şi H. Parkus (1953), H. Parkus (1959), D. Burgreen (1971), B. A. Boley şi J. H. Weiner (1960, 1985, 1997), H. Parkus (1976), N. Noda, R. B. Hetnarski şi Y. Tanigava (ed. 2a, 2003), R. B. Hetnarski şi M. R. Eslami (2008).

Prima carte asupra *Termoelasticității* de W. Nowacki a apărut în 1960 în limba poloneză, fiind tradusă în limba engleză în 1962. J. L. Nowinski a publicat o amplă monografie în 1978.

O bibliografie detaliată asupra tensiunilor termice a fost publicată de Th. R. Tauchert şi R. B. Hetnarski (1986).

Dintre lucrările în limba română trebuie menționată cartea *Solicitări termice în construcția de maşini* scrisă de un colectiv sub conducerea prof. Bazil Popa (1978) şi manualul *Termoelasticitate* publicat de Ion Grindei (1967).

2.
BARE SOLICITATE AXIAL

Distribuția uniformă a temperaturii în secțiunea transversală a unei bare produce, în general, tensiuni termice cu distribuție constantă, echivalente cu o forță axială. În acest capitol se calculează tensiunile termice în bare la care în secțiunea transversală acționează doar forțe axiale. Este cazul barelor omogene, în câmpuri termice staționare. Câteva probleme elementare sunt rezolvate cu metodele Rezistenței materialelor şi cu metoda forțelor termoelastice echivalente.

2.1 Deformații specifice termice libere

Fie o bară cu secțiunea constantă A şi lungimea ℓ (fig. 2.1, *a*).

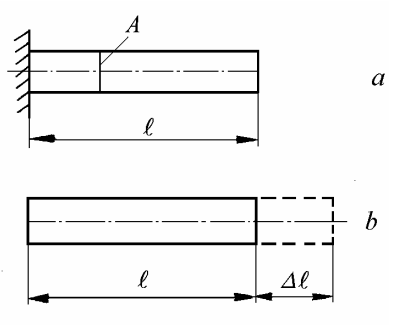


Fig. 2.1

Dacă temperatura barei creşte de la o valoare de referință T_1 la valoarea finală T_2, astfel încât

$$T = T_2 - T_1, \tag{2.1}$$

variația de temperatură T produce o alungire (fig. 2.1, *b*)

$$\Delta\ell = \ell\alpha T, \tag{2.2}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară al materialului barei.

Rezultă că alungirea specifică termică este

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \alpha T \,. \tag{2.3}$$

Dacă $T < 0$, bara se scurtează.

În Tabelul 2.1 se prezintă valori ale coeficientului de dilatare termică liniară pentru diferite materiale (Mott, 1996). Oțelul şi betonul au aceleaşi valori, proprietate avantajoasă pentru betonul armat.

Tabelul 2.1

Materialul	Coeficientul de dilatare termică liniară, α, grd^{-1}	Modulul de elasticitate longitudinal, *E*, GPa
Oțel	$12 \cdot 10^{-6}$	210
Cupru	$17 \cdot 10^{-6}$	120
Bronz	$18 \cdot 10^{-6}$	115
Alamă	$19 \cdot 10^{-6}$	95
Aluminiu	$25 \cdot 10^{-6}$	70
Beton	$12 \cdot 10^{-6}$	15-23

Exemplul 2.1

Un cadru din aliaj de aluminiu, cu $\alpha_{AL} = 23{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$ şi lungime $4{,}35\,\text{m}$, susține un geam din sticlă cu $\alpha_{ST} = 9 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$ mai scurt cu $3\,\text{mm}$, la temperatura de 35^{o}C. La ce temperatură cadrul şi geamul vor avea aceeaşi lungime ?

Rezolvare. Deoarece $\alpha_{AL} > \alpha_{ST}$ şi $\ell_{AL} > \ell_{ST}$, pentru a ajunge la aceeaşi lungime, temperatura trebuie să descrească, aluminiul contractându-se mai mult decât sticla. Egalând lungimile finale

$$\ell_{AL} + \ell_{AL}\alpha_{AL}T = \ell_{ST} + \ell_{ST}\alpha_{ST}T \,,$$

se obține diferența de temperatură

$$T = -\frac{\ell_{AL} - \ell_{ST}}{\ell_{AL}\alpha_{AL} - \ell_{ST}\alpha_{ST}} = -\frac{4{,}35 - 4{,}347}{23{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}35 - 9 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}347} = -48^{\text{o}}\text{C} \,.$$

Rezultă că geamul şi cadrul vor avea aceeaşi lungime la

$$T_2 = T_1 + T = 35 - 48 = -13^{o}\,\mathrm{C}\,.$$

Dacă temperatura scade sub $-13^{o}\,\mathrm{C}$, cadrul se va contracta mai repede decât geamul, producând tensiuni termice în sticlă, care se poate sparge.

Dacă o parte a cadrului se scurtează mai mult ca cealaltă, datorită expunerii la temperaturi diferite, în geam pot apare fisuri diagonale, aşa cum apar în zidăria de umplutură şi pereţii despărţitori ai unei clădiri, prin mişcarea verticală a stâlpilor, în special la etajele superioare ale clădirilor înalte, datorite variaţiilor de temperatură între exterior şi interior.

2.2 Deformaţii specifice termoelastice

Sub acţiunea simultană a forţelor exterioare şi a variaţiei de temperatură, se consideră că deformaţiile specifice se adună liniar

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_T\,, \tag{2.4}$$

unde indicele M arată deformaţii specifice ‘mecanice’, produse de forţele exterioare, şi indicele T arată deformaţii specifice ‘termice’, produse de variaţia temperaturii.

Pe baza legii lui Hooke şi a expresiei (2.3), relaţia (2.4) se mai scrie

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha T\,, \tag{2.5}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului iar σ sunt tensiunile normale.

Valori ale modulelor de elasticitate E pentru diferite materiale sunt date în Tabelul 2.1.

Variaţia temperaturii nu produce lunecări specifice în bare.

2.3 Legea lui Hooke cu efecte termoelastice

Relaţia (2.5) se mai scrie sub forma

$$\sigma = E\varepsilon - E\alpha T = E\left(\varepsilon - \alpha T\right), \tag{2.6}$$

care reprezintă *legea lui Hooke cu efecte termoelastice*.

Expresia (2.6) are forma generală

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right), \tag{2.7}$$

reprezentată grafic în figura 2.2, unde ε_0 sunt deformații specifice inițiale (ce pot fi produse de pretensionări, jocuri sau alte efecte).

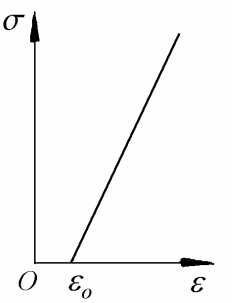


Fig. 2.2

2.4 Dilatarea împiedicată

Fie bara încastrată la capete (din material cu E şi α) din fig. 2.3, *a*, supusă la o variație de temperatură T.

Datorită dilatării împiedicate, în bară iau naştere tensiuni termice. Pentru calculul acestora se consideră întâi bara liberă, înlăturând încastrarea din dreapta (fig. 2.3, *b*). Încălzită uniform cu T bara se dilată liber cu

$$\Delta\ell = \ell\alpha T\,. \tag{2.8}$$

Pentru eliminarea alungirii termice $\Delta\ell$, se aplică barei o forță de compresiune F (fig. 3.2, *c*) care produce o scurtare

$$\Delta\ell = -\frac{F\ell}{EA}\,. \tag{2.9}$$

Egalând expresiile (2.8) şi (2.9), se obține

$$\ell\alpha T = -\frac{F\ell}{EA}\,, \tag{2.10}$$

de unde rezultă tensiunile termice

$$\sigma_T = \frac{F}{A} = -E\alpha T \,. \tag{2.11}$$

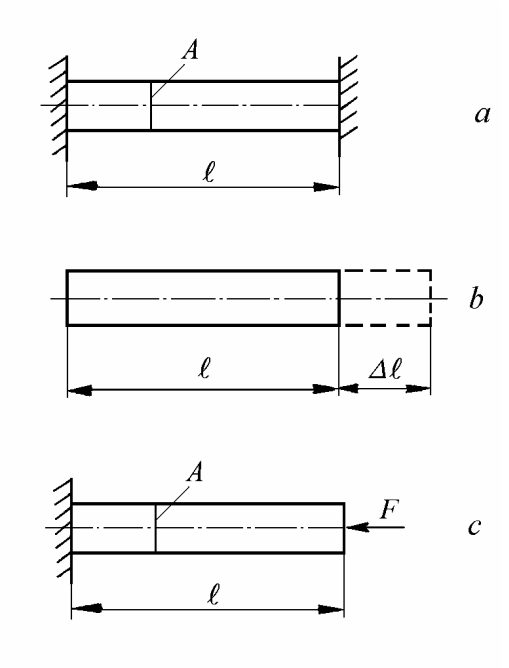


Fig. 2.3

Expresia (2.11) se poate obține direct din (2.5) impunând condiția ca alungirea specifică totală să fie nulă, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_M = -\varepsilon_T$, deci

$$\sigma = E\varepsilon_M = -E\varepsilon_T = -E\alpha T \,. \tag{2.12}$$

Exemplul 2.2

Să se calculeze tensiunile termice într-o bară dublu încastrată, din oțel cu $E = 206\,\text{GPa}$ și $\alpha = 11{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$, produse de o variație de temperatură $T = 100^{\text{o}}\text{C}$.

Rezolvare. Se obține

$$\sigma = -E\alpha T = -206 \cdot 10^3 \cdot 11{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 230{,}7\ \text{MPa} \,.$$

Exemplul 2.3

Să se calculeze tensiunile termice în bara cu secțiunea variabilă în trepte din figura 2.4, încălzită uniform cu diferența de temperatură T.

Rezolvare. Alungirea fiecărui tronson este suma dilatării libere şi a alungirii produse de forța axială. Suma alungirilor celor două tronsoane este zero

$$\ell_1 \alpha T + \frac{N\ell_1}{EA_1} + \ell_2 \alpha T + \frac{N\ell_2}{EA_2} = 0\,,$$

unde forța axială N este aceeaşi în ambele tronsoane.

Tensiunile termice sunt

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = -\frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1 + \dfrac{A_1}{A_2}\ell_2} E\alpha T\,; \qquad \sigma_2 = \frac{N}{A_2} = -\frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_2 + \dfrac{A_2}{A_1}\ell_1} E\alpha T\,.$$

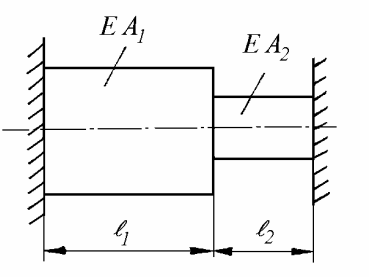


Fig. 2.4

2.5 Forțe axiale termoelastice

Relația (2.5) se mai scrie

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E} + \alpha T\,.$$

Înmulțind cu EA, se obține

$$\frac{EA}{\ell}\Delta\ell = \sigma A + EA\alpha T = N_M + N_T = N\,, \qquad (2.13)$$

unde $N_M = \sigma A$ este forța axială 'mecanică', $N_T = EA\alpha T$ este forța axială 'termică' şi N este forța axială efectivă (totală).

Pentru bara încastrată la capete, $\Delta\ell = 0$,

$$N_M = -N_T = -EA\alpha T\,. \qquad (2.14)$$

Deci bara dublu încastrată se comportă la fel ca o bară liberă, de aceeaşi lungime, solicitată de forțe axiale de compresiune $-EA\alpha T$. Ambele bare au alungirea totală nulă şi aceleaşi tensiuni termice (2.12).

2.6 Metoda lui Duhamel

Aplicând metoda lui Duhamel, problema termoelastică se reduce la o problemă clasică de teoria elasticității sau de Rezistența materialelor, fără efecte termice.

Pentru ilustrarea metodei, se consideră bara liberă din fig. 2.5, *a*, încălzită uniform cu *T*.

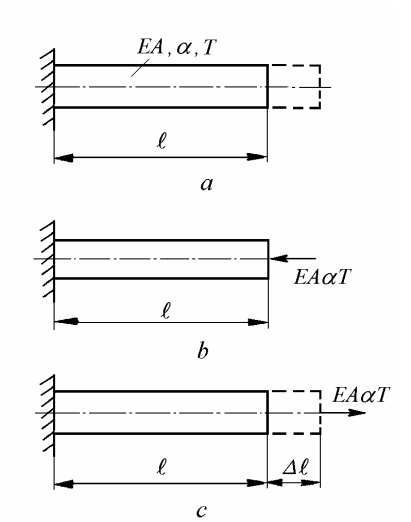


Fig. 2.5

Se aplică barei trei stări de solicitare succesive.

Starea 1. Se blochează deformațiile termice (fig. 2.5, *b*), aplicând la capătul barei libere o forță $F_T' = -EA\alpha T$ care produce tensiunile termice

$$\sigma_T' = -E\alpha T\,.$$

Starea 2. Se aplică barei libere o forță egală şi de sens contrar $F_T = EA\alpha T$ (fig. 2.5, *c*) care produce tensiunile termice

$$\sigma_T'' = \frac{F_T}{A} = E\alpha T$$

şi alungirea

$$\Delta\ell = \frac{F_T\,\ell}{EA} = \ell\alpha T\ .$$

Starea 3. Se suprapun stările 1 şi 2. Tensiunile termice se însumează

$$\sigma_T = \sigma_T' + \sigma_T'' = -E\alpha T + E\alpha T = 0\ .$$

Acestea sunt nule în acest caz, bara fiind liberă.

Deformațiile reale sunt cele calculate pentru starea 2

$$\Delta\ell = \ell\alpha T\ .$$

Deoarece deformațiile se calculează pentru starea 2, rezultă că, aplicând la capetele fiecărui tronson de bară, pentru care mărimile *E*, *A*, α şi *T* sunt constante, *forțele termoelastice echivalente* de întindere $EA\alpha T$, se obțin deplasările *reale* ale secțiunilor respective, adică necunoscutele din metoda deplasărilor. Pe baza acestora se calculează alungirile, apoi alungirile specifice şi tensiunile din starea 2. În final, la acestea se adaugă tesiunile 'inițiale', produse în starea 1, când deplasările capetelor tronsoanelor sunt blocate şi barele sunt încălzite uniform.

Dacă bara (cu *E*, *A*, α şi *T* constante) este încastrată la capete, aceasta este deja în starea 1, deci nu se mai aplică starea 2, şi deci nici starea 3.

Exemplul 2.4

Să se calculeze tensiunile termice în bara din fig. 2.6, *a*, cu un coeficient de dilatare termică liniară α, încălzită uniform cu *T*.

Rezolvare. Reacțiunile H_1 şi H_3, pozitive spre dreapta, se determină din sistemul format din ecuația de echilibru a forțelor

$$H_1 + H_3 = F$$

şi condiția de deformație $\Delta\ell_{12} + \Delta\ell_{23} = 0$,

$$\left(\ell_1 + \ell_2\right)\alpha T - \frac{H_1\ell_1}{EA_1} + \frac{H_3\ell_2}{EA_2} = 0\ .$$

Tensiunile termice se calculează apoi cu relațiile

$$\sigma_{12} = -\frac{H_1}{A_1}, \qquad \sigma_{23} = \frac{H_3}{A_2}\ .$$

În continuare, se utilizează metoda lui Duhamel. Rezolvarea este mai complicată dar este prezentată pentru a ilustra metoda care este implementată în toate programele cu elemente finite.

Starea 1. Se aplică celor două tronsoane cu secțiuni diferite forțele de compresiune

$$N_1' = -EA_1\alpha T\,, \qquad N_2' = -EA_2\alpha T\,,$$

care blochează dilatările termice.

Starea 2. Se consideră bara liberă din fig. 2.6, *b*, solicitată de forța exterioară *F*, de reacțiunile H_1'', H_3'' și de forțele termodinamice echivalente $EA_1\alpha T$ și $EA_2\alpha T$.

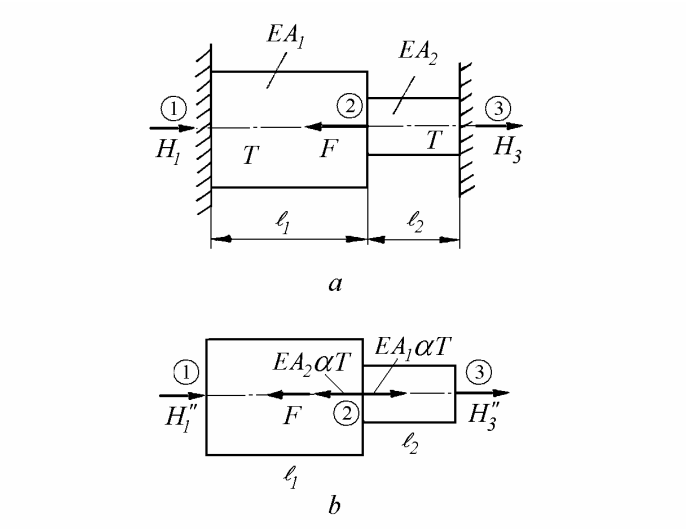


Fig. 2.6

Ecuația de echilibru a forțelor este

$$H_1'' + H_3'' = F + EA_2\alpha T - EA_1\alpha T\,.$$

Condiția de deformație, $\Delta\ell_{12} + \Delta\ell_{23} = 0$, se scrie

$$-\frac{H_1''\ell_1}{EA_1} + \frac{H_2''\ell_2}{EA_2} = 0\,.$$

Rezultă

$$H_3'' = \frac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1} H_1''\,, \qquad\qquad H_1''\left(1 + \frac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1}\right) = F - E\alpha T\left(A_1 - A_2\right),$$

$$H_1'' = \frac{F - E\alpha T\left(A_1 - A_2\right)}{1 + \dfrac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1}},$$

$$H_3'' = F - E\alpha T\left(A_1 - A_2\right) - H_1''.$$

Starea 3. Suprapunând stările 1 şi 2, rezultă reacțiunile reale

$$H_1 = H_1'' + EA_1\alpha T = \frac{F}{1 + \dfrac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1}} + \frac{\left(1 + \dfrac{\ell_1}{\ell_2}\right)A_2}{1 + \dfrac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1}} E\alpha T,$$

$$H_3 = H_3'' - EA_2\alpha T = \frac{F}{1 + \dfrac{\ell_2 A_1}{\ell_1 A_2}} - \frac{\left(1 + \dfrac{\ell_1}{\ell_2}\right)A_1}{1 + \dfrac{\ell_2 A_1}{\ell_1 A_2}} E\alpha T.$$

Tensiunile totale sunt

$$\sigma_{12} = -\frac{H_1}{A_1} = -\frac{\left(\ell_1 + \ell_2\right)E\alpha T}{\ell_1 + \dfrac{A_1}{A_2}\ell_2} - \frac{F}{A_1 + \dfrac{\ell_1}{\ell_2}A_2},$$

$$\sigma_{23} = \frac{H_3}{A_2} = -\frac{\left(\ell_1 + \ell_2\right)E\alpha T}{\dfrac{A_2}{A_1}\ell_1 + \ell_2} + \frac{F}{\dfrac{\ell_2}{\ell_1}A_1 + A_2}.$$

Pentru $F = 0$ se obțin rezultatele de la Exemplul 2.3.

2.7 Sisteme de bare articulate la capete

În general, în sistemele static *determinate* compuse din bare articulate nu se produc tensiuni termice. În sistemele static *nedeterminate* compuse din bare articulate apar tensiuni termice datorită constrângerilor de deplasări.

Pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate, este necesar să se stabilească patru tipuri de ecuații: de echilibru, de compatibilitate geometrică, relații între tensiuni şi deformații specifice, şi condiții la limită. În cazul sistemelor de bare articulate la capete, în cursurile de Rezistența materialelor se utilizează

ecuațiile de echilibru şi se stabilesc condiții de deformație care se exprimă în funcție de forțe.

În continuare, aceste probleme se vor rezolva prin două metode: 1) cu metoda lui Duhamel, transformând problema termoelastică într-o problemă clasică de calcul al tensiunilor produse de sarcini exterioare fără variație de temperatură, şi 2) utilizând metoda Mohr-Maxwell pentru calculul coeficienților din ecuațiile canonice ale metodei eforturilor.

În Capitolul 9 se prezintă metoda matricială a deplasărilor utilizată în analiza cu elemente finite.

2.7.1 Rezolvarea prin metoda lui Duhamel

2.7.1.1 Sistem de bare concurente

La sistemul din figura 2.7, *a*, compus din trei bare concurente, articulate la capete, încălzite uniform cu diferența de temperatură *T*, se cer tensiunile termice.

Se utilizează metoda lui Duhamel.

Starea 1. Se aplică barelor forțele de compresiune

$$N_1' = N_3' = -2EA\alpha T\,, \qquad N_2' = -EA\alpha T\,,$$

care blochează dilatările termice.

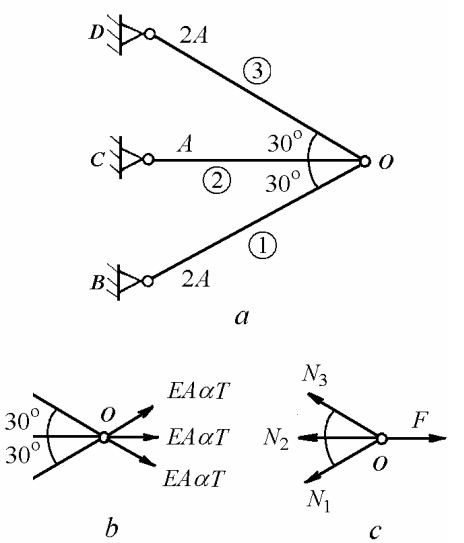


Fig. 2.7

Starea 2. Se aplică forțe egale şi de sens contrar (fig. 2.7, *b*). Rezultanta acestora în punctul O este

$$F = EA\alpha T\left(1+2\sqrt{3}\right).$$

Datorită simetriei, $N_1'' = N_3''$ (fig. 2.7, *c*). Condiția de echilibru în nodul *O* se scrie

$$N_2'' + \sqrt{3}N_1'' = EA\alpha T\left(1+2\sqrt{3}\right).$$

Condiția de deformație este

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta\ell_2 .$$

Exprimând alungirile în funcție de forțe se obține

$$\frac{N_1''\ell}{2EA} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{N_2''\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{EA}$$

sau

$$N_2'' = \frac{2}{3}N_1'' .$$

Înlocuind în ecuația de echilibru, rezultă

$$N_1'' = \frac{3\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2+3\sqrt{3}}EA\alpha T , \qquad N_2'' = \frac{2\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2+3\sqrt{3}}EA\alpha T .$$

Starea 3. Suprapunând stările 1 şi 2, se obține

$$N_1 = N_1' + N_1'' = \frac{3\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2+3\sqrt{3}}EA\alpha T - 2EA\alpha T = -\frac{EA\alpha T}{2+3\sqrt{3}},$$

$$N_2 = N_2' + N_2'' = \frac{2\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2+3\sqrt{3}}EA\alpha T - EA\alpha T = \frac{\sqrt{3}EA\alpha T}{2+3\sqrt{3}} .$$

Tensiunile termice sunt

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \sigma_3 = -\frac{E\alpha T}{2\left(2+3\sqrt{3}\right)}, \qquad \sigma_2 = \frac{\sqrt{3}E\alpha T}{2+3\sqrt{3}} .$$

Bara centrală este întinsă iar barele laterale sunt comprimate.

Exemplul 2.5

O bară rigidă din duraluminiu, cu coeficientul de dilatare liniară α_2, de greutate neglijabilă, este articulată la un capăt şi susţinută de două contrafişe din oţel, cu coeficientul de dilatare liniară α_1, ca în fig. 2.8, *a*. Se cer tensiunile termice în contrafişe produse de o variaţie de temperatură *T* (Umanski, 1973).

Rezolvare. Se utilizează metoda lui Duhamel.

Starea 1. Se aplică barelor din oţel forţele de compresiune

$$N'_{DB} = -EA\alpha_1 T\,, \qquad N'_{DC} = -EA\alpha_1 T\,,$$

care blochează dilatările termice.

Starea 2. Se aplică în B şi C forţe egale şi de sens contrar cu cele de mai sus. Forţele axiale în barele din oţel se notează N''_{DB}, N''_{DC}.

Ecuaţia de momente faţă de punctul O se scrie

$$\left(N''_{DB} - EA\alpha_1 T\right) a\sin\alpha + \left(N''_{DC} - EA\alpha_1 T\right) 3a\sin\beta = 0\,.$$

Înlocuind $\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$ şi $\sin\beta = 1/\sqrt{10}$, se obţine

$$N''_{DC} = -\frac{\sqrt{5}}{3} N''_{DB} + \frac{\sqrt{5}+3}{3} EA\alpha_1 T\,. \qquad (a)$$

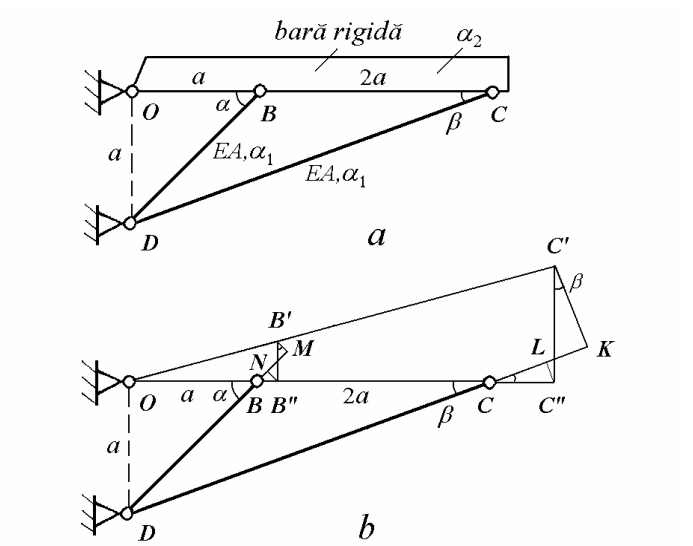


Fig. 2.8

Datorită dilatării barei rigide, punctele C şi B se deplasează pe orizontală (fig. 2.8, *b*)

$$CC''=3a\alpha_2 T\,,\quad BB''=a\alpha_2 T\,,$$

După încălzire, punctul C se deplasează în C',

$$KL=CK-CL\,,$$

$$C'C''\sin\beta=\frac{N''_{DC}\,a\sqrt{10}}{EA}-3a\alpha_2 T\cos\beta\,,$$

$$C'C''=\frac{N''_{DC}10a}{EA}-9a\alpha_2 T\,.$$

Punctul *B* se deplasează în B',

$$KL=CK-CL\,,$$

$$B'B''\sin\alpha=\frac{N''_{DB}\,a\sqrt{2}}{EA}-a\,\alpha_2 T\cos\alpha\,,$$

$$B'B''=\frac{N''_{DC}2a}{EA}-a\alpha_2 T\,.$$

Din asemănarea triunghiurilor $OB'B''$ şi $OC'C''$ (care exprimă coliniaritatea punctelor O, B' şi C') se obține

$$C'C''=3B'B''\,,$$

$$\frac{N''_{DC}10\,a}{EA}-9a\alpha_2 T=3\left(\frac{N''_{DB}\,a\sqrt{2}}{EA}-a\,\alpha_2 T\cos\alpha\right),$$

deci condiția de deformație se scrie

$$\frac{10\,N''_{DC}}{EA}-\frac{6\,N''_{DB}}{EA}=6\alpha_2 T\,. \qquad (b)$$

Din ecuațiile (*a*) şi (*b*) rezultă

$$\frac{N''_{DB}}{EA}=\frac{5\left(\frac{\sqrt{5}}{3}+1\right)\alpha_1-3\alpha_2}{\frac{5\sqrt{5}}{3}+3}T\,,\quad \frac{N''_{DC}}{EA}=\frac{3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}+1\right)\alpha_1+\sqrt{5}\,\alpha_2}{\frac{5\sqrt{5}}{3}+3}T\,.$$

Starea 3. Suprapunând stările 1 şi 2, rezultă forțele axiale în contrafişele din oțel

$$N_{DB} = N'_{DB} + N''_{DB} = -EA\alpha_1 T + \frac{5\left(\frac{\sqrt{5}}{3}+1\right)\alpha_1 - 3\alpha_2}{\frac{5\sqrt{5}}{3}+3} EAT = -\frac{3\alpha_2 - 2\alpha_1}{\frac{5\sqrt{5}}{3}+3} EAT ,$$

$$N_{DC} = N'_{DC} + N''_{DC} = -EA\alpha_1 T + \frac{3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}+1\right)\alpha_1 + \sqrt{5}\,\alpha_2}{\frac{5\sqrt{5}}{3}+3} EAT = \frac{\sqrt{5}\alpha_2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}\alpha_1}{\frac{5\sqrt{5}}{3}+3} EAT ,$$

deci

$$N_{DC} = -\frac{\sqrt{5}}{3} N_{DB} .$$

Tensiunile termice în contrafişe sunt

$$\sigma_{DB} = -\frac{3\alpha_2 - 2\alpha_1}{\frac{5\sqrt{5}}{3}+3} ET , \qquad \sigma_{DC} = \frac{\sqrt{5}\alpha_2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}\alpha_1}{\frac{5\sqrt{5}}{3}+3} ET .$$

2.7.1.2 Sistem de bare paralele

Se consideră o bară rigidă cu greutate neglijabilă (fig. 2.9, *a*), susținută de trei tiranți. Se cer tensiunile termice din tiranți, produse de încălzirea uniformă a barei 2 cu diferența de temperatură *T*.

Rezolvare. Se utilizează metoda lui Duhamel.

Starea 1. Se aplică barei 2 forța de compresiune

$$N'_2 = -EA\alpha T ,$$

care blochează dilatarea termică. $N'_1 = N'_3 = 0$.

Starea 2. În articulația tirantului 2 cu bara orizontală rigidă se aplică o forță egală şi de sens contrar (fig. 2.9, *b*).

Ecuațiile de echilibru al barei rigide se scriu

$$N''_1 + N''_2 + N''_3 = EA\alpha T ,$$

$$2N''_1 = N''_3 .$$

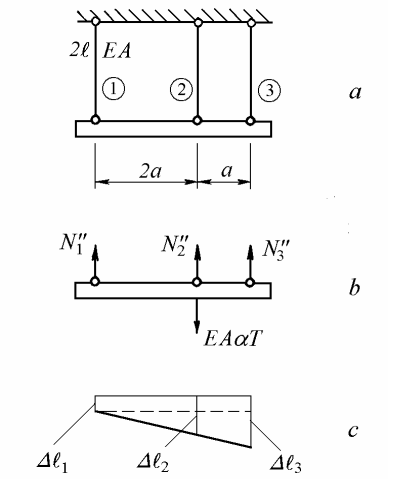


Fig. 2.9

Condiția de deformație exprimă coliniaritatea punctelor de prindere a tiranților de bara rigidă (fig. 2.9, *c*)

$$\frac{\Delta\ell_3 - \Delta\ell_1}{3a} = \frac{\Delta\ell_2 - \Delta\ell_1}{2a}$$

sau

$$\Delta\ell_1 - 3\Delta\ell_2 + 2\Delta\ell_3 = 0\,.$$

Exprimând alungirile în funcție de forțe se obține a treia ecuație între forțe

$$N_1'' - 3N_2'' + 2N_3'' = 0\,.$$

Rezultă forțele axiale din starea 2

$$N_1'' = \frac{3}{14}EA\alpha T\,,\quad N_2'' = \frac{5}{14}EA\alpha T\,,\quad N_3'' = \frac{6}{14}EA\alpha T\,.$$

Starea 3. Suprapunând stările 1 şi 2, rezultă

$$N_1 = \frac{3}{14}EA\alpha T\,,\quad N_2 = -\frac{9}{14}EA\alpha T\,,\quad N_3 = \frac{6}{14}EA\alpha T\,.$$

Tensiunile termice sunt

$$\sigma_1 = \frac{3}{14}E\alpha T\,,\quad \sigma_2 = -\frac{9}{14}E\alpha T\,,\quad \sigma_3 = \frac{6}{14}E\alpha T\,.$$

Barele laterale sunt întinse iar bara centrală este comprimată.

2.7.2 Rezolvarea prin metoda Mohr-Maxwell

În sisteme de bare solicitate axial, deplasările se pot calcula utilizând metoda Mohr-Maxwell, cu relația

$$\delta = \sum_i \int_\ell \left(\frac{N_i}{E_i A_i} + \alpha_i T_i \right) n_i \, \mathrm{d}x \,. \qquad (2.15)$$

În expresia (2.15), N_i este forța axială în secțiunea *x* a sistemului solicitat de forțele exterioare, $E_i A_i$ este modulul de rigiditate la întindere-compresiune al barei *i*, α_i este coeficientul de dilatare termică liniară şi T_i este variația de temperatură ale barei *i*, iar n_i este forța axială în secțiunea *x* a sistemului cu aceeaşi rezemare, dar solicitat de o singură forță egală cu 1 aplicată în punctul şi pe direcția lui δ.

La grinzile cu zăbrele, forțele axiale şi modulele de rigiditate sunt constante pe lungimea barelor, deci relația (2.15) devine

$$\delta = \sum_i \left(\frac{N_i \ell_i}{E_i A_i} + \alpha_i T_i \ell_i \right) n_i \,. \qquad (2.16)$$

La rezolvarea prin metoda eforturilor, sistemul static nedeterminat (s.s.n.) se transformă într-un sistem static determinat (s.s.d.) echivalent, prin suprimarea unui număr echivalent de legături. Forțele (sau momentele) din legături se transformă în forțe exterioare, denumite *necunoscute static nedeterminate*, care se notează distinct cu X_j.

Condițiile de echivalență între s.s.d. echivalent şi s.s.n. iau forma *ecuațiilor canonice ale metodei eforturilor*, care sunt condiții de deformație în punctele şi pe direcțiile necunoscutelor static nedeterminate

$$\begin{aligned} &\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + ... + \delta_{1n} X_n = -\delta_{10}, \\ &\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + ... + \delta_{2n} X_n = -\delta_{20}, \\ &..... \\ &\delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + ... + \delta_{nn} X_n = -\delta_{n0}. \end{aligned} \qquad (2.17)$$

În (2.17) coeficienții au forma

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum \int_\ell \frac{n_i \, n_j}{E A} \mathrm{d}x \,, \qquad . \qquad (2.18)$$

$$\delta_{j0} = \sum \int_{\ell} \left(\frac{N^0}{EA} + \alpha T \right) n_j \, \mathrm{d}x \,. \qquad (2.19)$$

Rezolvând sistemul (2.17) format din ecuațiile provenite din condițiile de deformație, se obțin necunoscutele static nedeterminate, apoi din ecuațiile de echilibru se determină restul reacțiunilor sau eforturilor care acționează în sistemul static determinat echivalent. Astfel, problema se reduce la studiul sistemului static determinat echivalent.

Exemplul 2.6

Să se calculeze tensiunile termice în barele sistemului din figura 2.7, *a*, încălzite uniform cu diferența de temperatură *T*, prin metoda eforturilor şi metoda Mohr-Maxwell.

Rezolvare. Se alege $R_2 = X_1$ drept necunoscută static nedeterminată. Se construiește s.s.d. echivalent (fig. 2.10, *a*), sistemul "0" (fig. 2.10, *b*) şi sistemul "1" (fig. 2.10, *c*), apoi sistemul "0" cu dilatări libere (fig. 2.10, *e*).

Din figura 2.10, *e* rezultă

$$\delta_{10} = O''O' = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \ell \alpha T = -\frac{\sqrt{3}}{6} \ell \alpha T.$$

În figura 2.10, *f* se arată forțele cu care barele acționează asupra nodului O în sistemul "1". Forțele axiale în bare sunt egale şi de sens contrar

$$n_1 = n_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad n_2 = 1.$$

Se calculează

$$\delta_{11} = \sum_i \frac{n_i^2 \ell_i}{E_i A_i} = 2 \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \ell}{2EA} + \frac{(1)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \ell}{EA} = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{6} \frac{\ell}{EA}. \qquad (2.18)$$

Rezultă

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} EA\alpha T \,.$$

Forțele care acționează asupra nodului O în sistemul static determinat echivalent sunt date în figura 2.10, *d*. Rezultă forțele în bare

$$N_2 = X_1, \qquad N_1 = N_3 = -\frac{X_1}{\sqrt{3}}$$

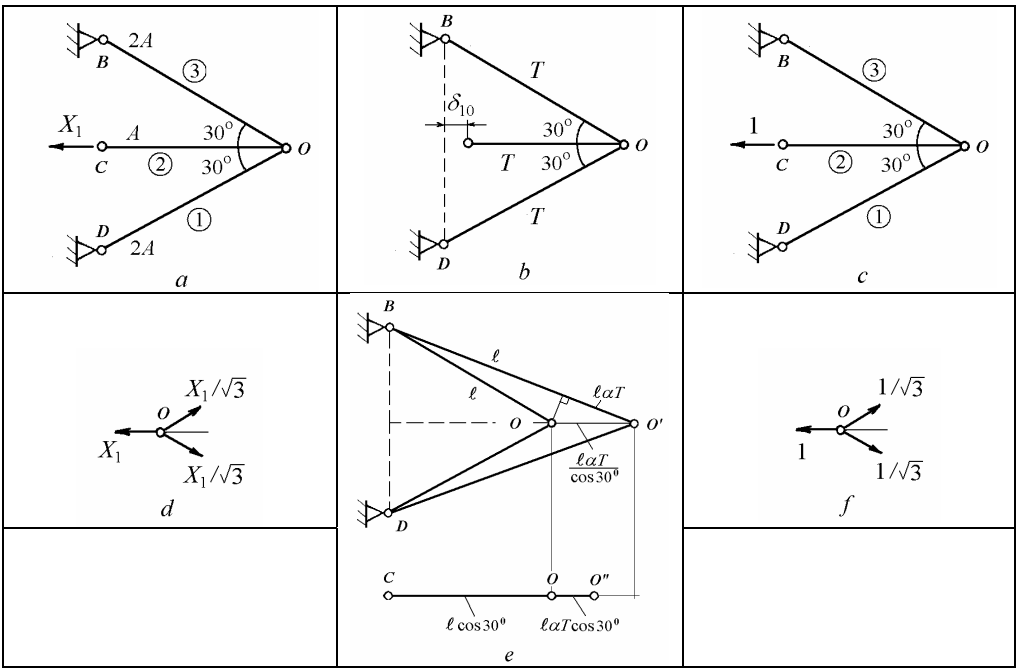


Fig. 2.10

şi tensiunile termice

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}} E\alpha T\,,$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{2A} = -\frac{1}{2\left(2+3\sqrt{3}\right)} E\alpha T\,.$$

2.8 Bare cu secțiune eterogenă simetrică

Barele cu secțiune eterogenă încălzite uniform sunt solicitate doar la întindere-compresiune dacă secțiunea este simetrică. Ele se comportă ca un sistem de bare paralele. Exemplul de mai jos este rezolvat cu metoda clasică din Rezistența materialelor.

Ansamblul simetric din figura 2.11 este compus din trei bare având fiecare secțiunea transversală *A*, modulele de elasticitate E_1 și $E_2 > E_1$, și coeficienții de dilatare termică liniară α_1 și $\alpha_2 < \alpha_1$. Sub acțiunea forței *F*, în bare apar tensiuni de compresiune neegale. Se cere să se calculeze creșterea temperaturii T prin care se realizează egalizarea tensiunilor în bare.

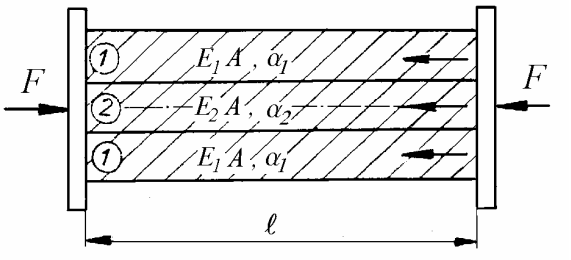


Fig. 2.11

Rezolvare

Etapa 1. Fie σ_1 și σ_2 tensiunile în barele 1 și, respectiv 2. Condiția de echivalență între forțe și tensiuni se scrie

$$-F = 2A\sigma_1 + A\sigma_2 .$$

Rezultă o primă relație între tensiuni

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{F}{A},$$

iar din condiția de deformație $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{\sigma_2}{E_2}$, o a doua relație între tensiuni

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1}\sigma_1 \ .$$

Se obțin tensiunile produse de forța *F :*

$$\sigma_1 = -\frac{F\,E_1}{A\left(2E_1 + E_2\right)}\ , \quad \sigma_2 = -\frac{F\,E_2}{A\left(2E_1 + E_2\right)}, \qquad \left|\sigma_1\right| < \left|\sigma_2\right| .$$

Etapa 2. Condiția de deformație în cazul dilatării împiedicate

$$\ell\,\alpha_1 T - \frac{N\ell}{E_1 2A} = \ell\,\alpha_2 T + \frac{N\ell}{E_2 A},$$

unde *N* este forța axială de interacțiune între bara centrală şi barele laterale, se mai scrie sub forma

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\,T = -\frac{\sigma_1^*}{E_1} - \frac{\sigma_2^*}{E_2}.$$

Se adaugă relația între forța axială şi tensiunile din etapa a doua

$$\left|\sigma_1^*\, 2A\right| = \sigma_2^* A = N\,,$$

de unde rezultă şi semnificația tensiunilor notate cu steluță.

Se obțin tensiunile termice

$$\left|\sigma_1^*\right| = \frac{T\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}{2E_1 + E_2}\ ,\ \sigma_2^* = \frac{2T\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}{2E_1 + E_2}\ .$$

Prin suprapunerea efectelor, suma tensiunilor în cele două stări trebuie să fie aceeaşi

$$\sigma_1 - \sigma_1^* = \sigma_2 + \sigma_2^*,$$

$$-\frac{F\,E_1}{A(2E_1 + E_2)} - \frac{T\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}{2E_1 + E_2} = -\frac{F\,E_2}{A(2E_1 + E_2)} + \frac{2\,T\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}{2E_1 + E_2}\ .$$

Rezultă creşterea temperaturii necesară pentru egalizarea tensiunilor

$$T = \frac{F\,(E_2 - E_1)}{3\,A(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}.$$

Exemplul următor se reduce tot la o problemă de bare paralele.

Exemplul 2.7

Un şurub din oțel cu diametrul $\delta = 10\,\text{mm}$ este introdus într-o țeavă din cupru cu $d = 12\,\text{mm}$, $D = 18\,\text{mm}$ şi fixat cu o piuliță fără strângere (fig. 2.12). Să se calculeze tensiunile produse prin încălzirea uniformă a ansamblului cu $T = 50^0\text{C}$. Se cunosc modulele de elasticitate şi coeficienții de dilatare termică liniară, la oțel $E_1 = 208\,\text{GPa}$, $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$ şi la cupru $E_2 = 100\,\text{GPa}$, $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$.

Rezolvare

La încălzirea ansamblului, cuprul tinde să se dilate mai mult ca oțelul. Legătura prin piuliță face ca țeava să fie comprimată şi şurubul să fie întins, cu

forțe egale şi de sens contrar $N_1 = -N_2$. Țeava este comprimată cu $\left|\Delta\ell_2\right|$ iar şurubul este întins cu $\Delta\ell_1$. Alungirea şurubului însumată cu scurtarea țevii egalează diferența de dilatare liberă a celor două piese. Condiția de deformație se scrie

$$(\alpha_2 - \alpha_1)T = \frac{X_1}{EA_1} + \frac{X_1}{EA_2},$$

în care

$$A_1 = \frac{\pi\delta^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78{,}54\ \text{mm}^2,$$

$$A_2 = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} = \frac{\pi\left(18^2 - 12^2\right)}{4} = 141{,}37\ \text{mm}^2,$$

de unde rezultă forțele axiale şi apoi tensiunile.

În continuare se prezintă rezolvarea prin metoda lui Duhamel.

Starea 1. Se aplică şurubului şi țevii forțele de compresiune

$$N_1' = -E_1A_1\alpha_1T, \qquad N_2' = -E_2A_2\alpha_2T,$$

care blochează dilatarea termică.

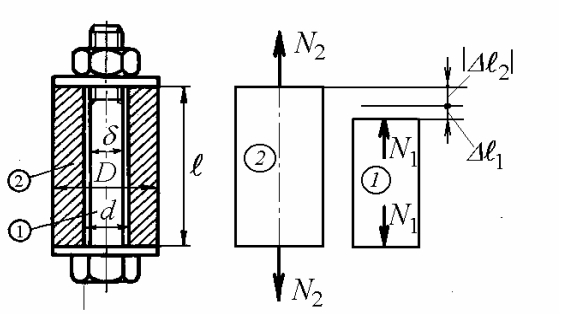


Fig. 2.12

Starea 2. Se aplică şurubului şi țevii forțele egale şi de sens contrar față de cele din Starea 1

$$N_1'' = E_1A_1\alpha_1T, \qquad N_2'' = E_2A_2\alpha_2T.$$

Ecuația de echilibru a forțelor se scrie

$$N_1'' + N_2'' = E_1A_1\alpha_1T + E_2A_2\alpha_2T.$$

Condiția de deformație $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$ se scrie

$$\frac{N_1''}{E_1A_1} = \frac{N_2''}{E_2A_2} = \frac{N_1'' + N_2''}{E_1A_1 + E_2A_2} = \frac{E_1A_1\alpha_1T + E_2A_2\alpha_2T}{E_1A_1 + E_2A_2},$$

de unde rezultă forțele axiale din starea 2

Starea 3. Suprapunând stările 1 şi 2, rezultă

$$N_1 = N_1' + N_1'' = \frac{E_1A_1\alpha_1T + E_2A_2\alpha_2T}{1 + \dfrac{E_2A_2}{E_1A_1}} - E_1A_1\alpha_1T = \frac{E_2A_2(\alpha_2 - \alpha_1)T}{1 + \dfrac{E_2A_2}{E_1A_1}},$$

$$N_2 = N_2' + N_2'' = \frac{E_1A_1\alpha_1T + E_2A_2\alpha_2T}{\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2} + 1} - E_2A_2\alpha_2T = -\frac{E_1A_1(\alpha_2 - \alpha_1)T}{\dfrac{E_1A_1}{E_2A_2} + 1} = -N_1.$$

Tensiunile termice sunt

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{E_1E_2A_2(\alpha_2 - \alpha_1)T}{E_1A_1 + E_2A_2} =$$

$$= \frac{2{,}08\cdot10^5\cdot10^5\cdot141{,}37\cdot(17-12)\cdot10^{-6}\cdot50}{2{,}08\cdot10^5\cdot78{,}54 + 10^5\cdot141{,}37} = 24{,}12\,\text{MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{E_1E_2A_1(\alpha_2 - \alpha_1)T}{E_1A_1 + E_2A_2} =$$

$$= -\frac{2{,}08\cdot10^5\cdot10^5\cdot78{,}54\cdot(17-12)\cdot10^{-6}\cdot50}{2{,}08\cdot10^5\cdot78{,}54 + 10^5\cdot141{,}37} = -13{,}4\,\text{MPa}.$$

2.9 Dilatarea parțial împiedicată

Structurile cu jocuri între elementele componente, încălzite uniform, întâi se dilată liber, până la anularea jocurilor, după care urmează dilatarea împiedicată, care produce tensiuni termice. Pentru calculul acestora se introduce jocul în condiția de deformație.

Exemplul 2.8

Să se calculeze tensiunile termice în bara din figura 2.13, cu un coeficient de dilatare termică liniară α, încălzită uniform cu *T*.

Rezolvare. Față de problema de la Exemplul 2.4, condiția de deformație devine

$$\Delta\ell_{12} + \Delta\ell_{23} = \delta\,,$$

$$\ell_1\alpha T - \frac{H_1\ell_1}{EA_1} + \ell_2\alpha T + \frac{H_3\ell_2}{EA_2} = \delta\,,$$

unde $H_3 = F - H_1$.

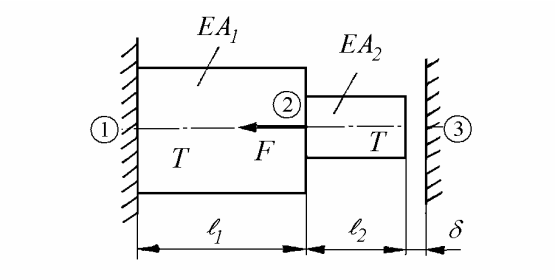


Fig. 2.13

Rezultă

$$\sigma_{12} = -\frac{H_1}{A_1} = -\frac{(\ell_1+\ell_2)E\alpha T - E\delta}{\ell_1 + \frac{A_1}{A_2}\ell_2} - \frac{F}{A_1 + \frac{\ell_1}{\ell_2}A_2}\,,$$

$$\sigma_{23} = \frac{H_3}{A_2} = \frac{(\ell_1+\ell_2)E\alpha T - E\delta}{\frac{A_2}{A_1}\ell_1 + \ell_2} + \frac{F}{\frac{\ell_2}{\ell_1}A_1 + A_2}\,.$$

Pentru $\delta = 0$ se obțin rezultatele de la Exemplul 2.4.

Exemplul 2.9

Să se calculeze tensiunile termice în barele din figura 2.14, încălzite uniform.

Rezolvare. Se presupune $\ell_1\alpha_1 T_1 - \ell_2\alpha_2 T_2 > \delta$.

Alungirea țevii 1 este mai mare cu δ decât alungirea tijei 2

$$\ell_1\alpha_1 T_1 + \frac{N_1\ell_1}{E_1A_1} = \ell_2\alpha_2 T_2 + \frac{N_2\ell_2}{E_2A_2} + \delta\,.$$

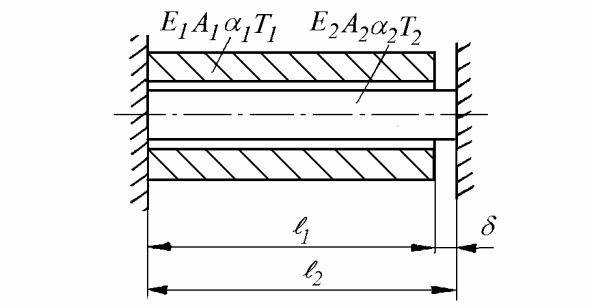


Fig. 2.14

Echilibrul forțelor implică

$$N_1 + N_2 = 0\,.$$

Rezultă tensiunile termice

$$\sigma_1 = -E_1\alpha_1 T_1 \frac{1 - \dfrac{\ell_2\alpha_2 T_2 + \delta}{\ell_1\alpha_1 T_1}}{1 + \dfrac{E_1A_1\ell_2}{E_2A_2\ell_1}}, \quad \sigma_2 = -\sigma_1\frac{A_1}{A_2}\,.$$

2.10 Bare cu secțiunea variabilă

Se consideră bare cu secțiunea variabilă $A(x)$, încastrate la capete şi supuse la o variație a temperaturii $T(x)$.

Condiția de deformație (2.10) devine

$$\int_0^\ell \alpha T(x)\mathrm{d}x = -\frac{F}{E}\int_0^\ell \frac{\mathrm{d}x}{A(x)}\,.$$

Rezultă forța axială şi tensiunile termice

$$F = -E\alpha \frac{\int_0^{\ell} T(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}x}{A(x)}}\,, \quad \sigma_x = \frac{F}{A(x)} = -\frac{E\alpha \int_0^{\ell} T(x)\,\mathrm{d}x}{A(x)\int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}x}{A(x)}}\,. \tag{2.20}$$

Exemplul 2.10

Să se calculeze tensiunile termice în țeava tronconică din figura 2.15, pentru o variație a temperaturii după o lege $T(x)$ în lungul țevii.

Rezolvare. În secțiunea *x*, aria secțiunii transversale este

$$A(x) = \pi h\left[\, d_0 - h + \frac{x}{\ell}(d_1 - d_0)\,\right] = \pi h\,(d_1 - d_0)\left(\,\frac{x}{\ell} + \frac{d_0 - h}{d_1 - d_0}\,\right).$$

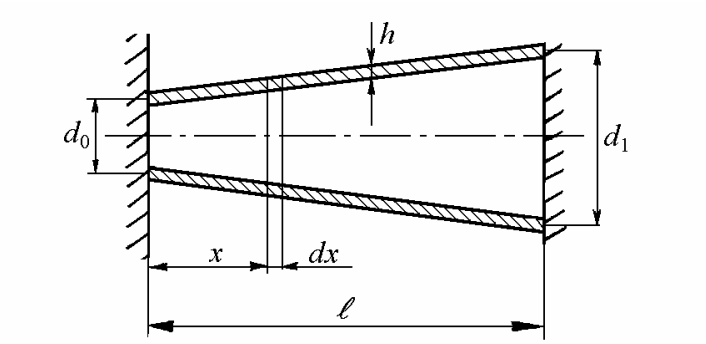


Fig. 2.15

Numitorul expresiei (2.20) este

$$A(x)\int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}x}{A(x)} = \left(\,\frac{x}{\ell} + \frac{d_0 - h}{d_1 - d_0}\,\right)\int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x}{\ell} + \frac{d_0 - h}{d_1 - d_0}} = \ell\left(\,\frac{x}{\ell} + \frac{d_0 - h}{d_1 - d_0}\,\right)\ln\frac{d_1 - h}{d_0 - h}\,.$$

Rezultă tensiunile termice

$$\sigma_x = -\frac{E\alpha}{\ell\left(\,\frac{x}{\ell} + \frac{d_0 - h}{d_1 - d_0}\,\right)\ln\frac{d_1 - h}{d_0 - h}}\int_0^{\ell} T(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3.
BARE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

În acest capitol se calculează tensiunile şi deformaţiile termice în bare omogene de tip Bernoulli-Euler şi lamele bimetalice, în câmpuri termice staţionare.

Se fac următoarele ipoteze: a) secţiunile transversale plane, înainte de încovoierea barei, rămân plane după încovoiere şi perpendiculare pe axa deformată a barei; b) razele de curbură ale barei deformate sunt mari în comparaţie cu dimensiunile transversale; c) elemente longitudinale ale barei sunt solicitate doar la întindere sau compresiune, nu există tensiuni normale transversale; d) modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei are aceeaşi valoare la întindere şi la compresiune. La stabilirea formulelor de bază se consideră că barele au secţiune constantă şi momentul încovoietor este constant în lungul barei.

Distribuţia neuniformă a temperaturii în secţiunea transversală a unei bare omogene şi încălzirea uniformă a barelor eterogene produc tensiuni termice cu distribuţie neuniformă, echivalente cu o forţă axială şi un moment încovoietor. Calculul tensiunilor şi deformaţiilor termice se poate face cu relaţiile stabilite pentru încovoierea fără efecte termice, înlocuind eforturile secţionale produse de sarcinile exterioare cu echivalenţii lor termici.

3.1 Bare drepte omogene

Se consideră o bară dreaptă omogenă, cu secţiune de formă oarecare, raportată la un sistem de axe centrale (cu originea în centrul de greutate al secţiunii transversale) oarecare, în care axele *Oy* şi *Oz* nu sunt axe principale de inerţie.

3.1.1 Bara cu sarcini exterioare

În general, în afara acţiunii câmpului termic staţionar, asupra barei pot acţiona sarcini axiale (de ex. forţe centrifuge în palete) şi sarcini exterioare transversale.

Relații între deplasări şi deformații specifice

Ca o consecință directă a ipotezei secțiunii plane, deplasarea longitudinală a unui punct de coordonate *y*, *z*, are forma generală

$$u_x = u + z\,\varphi - y\,\psi\,, \tag{3.1}$$

unde *u* este o deplasare de translație a secțiunii în lungul axei *Ox*, φ este unghiul de rotație al secțiunii față de axa *Oy* şi ψ este unghiul de rotație față de axa *Oz* (fig. 3.1).

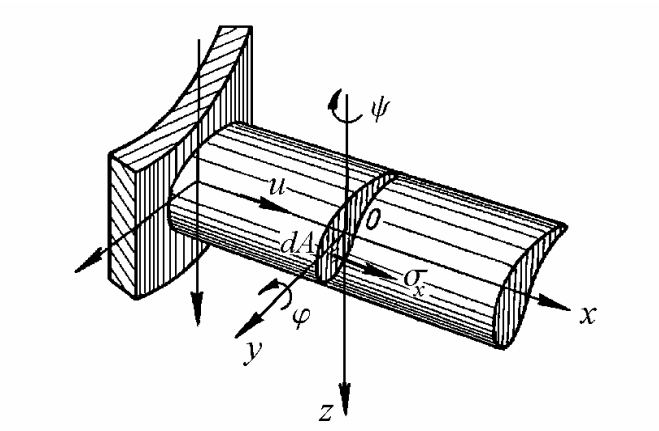


Fig. 3.1

Alungirea specifică este

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = \varepsilon + \kappa_y\, z - \kappa_z\, y\,, \tag{3.2}$$

unde

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \qquad \kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \qquad \kappa_z = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}. \tag{3.3}$$

În relațiile (3.3), κ_y şi κ_z sunt curburile fibrei medii a barei în planele *xOz*, respectiv *xOy*. Indicii corespund axelor față de care au loc rotirile respective.

Relația între tensiuni şi deformații specifice

Aplicând legea lui Hooke (2.6), rezultă

$$\sigma_x = E\left(\varepsilon_x - \alpha T\right) = E\left(\varepsilon + \kappa_y\, z - \kappa_z\, y\right) - E\alpha T\,, \tag{3.4}$$

relație valabilă numai pentru materiale liniar-elastice.

Condiții de echilibru

Dacă asupra barei acționează forțe exterioare, dstribuția tensiunilor este echivalentă static cu momentul încovoietor din secțiune, de componente M_y, M_z, și cu forța axială *N* (fig. 3.2). Relațiile de echivalență între tensiunile σ_x și eforturile secționale se scriu considerând forța $\sigma_x \mathrm{d}A$ aplicată în centrul suprafeței elementare $\mathrm{d}A$, de coordonate *y*, *z*:

$$N = \int_A \sigma_x \,\mathrm{d}A, \tag{3.5}$$

$$M_y = \int_A z\,\sigma_x \,\mathrm{d}A, \tag{3.6}$$

$$M_z = -\int_A y\,\sigma_x \,\mathrm{d}A. \tag{3.7}$$

Pe fața pozitivă a secțiunii (cu normala exterioară în sensul pozitiv al axei *x*), eforturile secționale sunt pozitive când sunt dirijate în sensul pozitiv al axelor de coordonate.

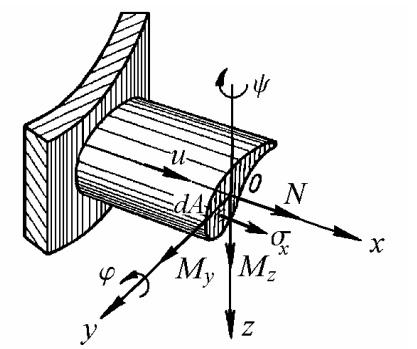


Fig. 3.2

Înlocuind expresia (3.4) în relațiile (3.5)-(3.7) rezultă

$$\varepsilon E \int_A \mathrm{d}A + \kappa_y E \int_A z\,\mathrm{d}A - \kappa_z E \int_A y\,\mathrm{d}A - E \int_A \alpha T\,\mathrm{d}A = N, \tag{3.8}$$

$$\varepsilon E \int_A z\,\mathrm{d}A + \kappa_y E \int_A z^2\,\mathrm{d}A - \kappa_z E \int_A y\,z\,\mathrm{d}A - E \int_A \alpha T\,z\,\mathrm{d}A = M_y, \tag{3.9}$$

$$\varepsilon E \int_A y\,\mathrm{d}A + \kappa_y E \int_A y\,z\,\mathrm{d}A - \kappa_z E \int_A y^2\,\mathrm{d}A - E \int_A \alpha T\,y\,\mathrm{d}A = -M_z. \tag{3.10}$$

Eforturile secționale echivalente tensiunilor termice se notează

$$N_T = E \int_A \alpha T \, \mathrm{d}A \,, \tag{3.11}$$

$$M_{Ty} = E \int_A \alpha T z \, \mathrm{d}A \,, \tag{3.12}$$

$$M_{Tz} = - E \int_A \alpha T y \, \mathrm{d}A \,. \tag{3.13}$$

Deoarece momentele statice față de axe centrale sunt nule

$$\int_A z \, \mathrm{d}A = 0 \,, \quad \int_A y \, \mathrm{d}A = 0 \,, \tag{3.14}$$

înlocuind relațiile de definiție ale momentelor de inerție

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A \,, \quad I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A \,, \quad I_{yz} = \int_A yz \, \mathrm{d}A \,, \tag{3.15}$$

în (3.8)-(3.10), rezultă

$$\varepsilon \, E A = \overline{N} \,, \tag{3.16}$$

$$\kappa_y \, I_y - \kappa_z \, I_{yz} = \frac{\overline{M}_y}{E} \,, \tag{3.17}$$

$$\kappa_y \, I_{yz} - \kappa_z \, I_z = - \frac{\overline{M}_z}{E} \,, \tag{3.18}$$

unde

$$\overline{N} = N + N_T \,, \tag{3.19}$$

$$\overline{M}_y = M_y + M_{Ty} \,, \tag{3.20}$$

$$\overline{M}_z = M_z + M_{Tz} \,, \tag{3.21}$$

sunt eforturile secționale echivalente.

Din relațiile (3.17) și (3.18) se obțin curburile

$$\kappa_y = \frac{1}{E} \frac{I_z \, \overline{M}_y + I_{yz} \, \overline{M}_z}{I_y \, I_z - I_{yz}^2} \,, \qquad \kappa_z = \frac{1}{E} \frac{I_{yz} \, \overline{M}_y + I_y \, \overline{M}_z}{I_y \, I_z - I_{yz}^2} \,. \tag{3.22}$$

Înlocuind expresiile (3.16) şi (3.22) în relația (3.4) se obține formula tensiunilor normale față de axe centrale neprincipale

$$\sigma_x = \frac{\overline{N}}{A} - \frac{I_{yz}\,\overline{M}_y + I_y\,\overline{M}_z}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,y + \frac{I_z\,\overline{M}_y + I_{yz}\,\overline{M}_z}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,z - E\alpha T\,. \tag{3.23}$$

Direcțiile principale de inerție sunt rotite față de axele Oy şi Oz cu unghiul θ (fig. 3.3) dat de

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\,I_{yz}}{I_z - I_y}\,. \tag{3.24}$$

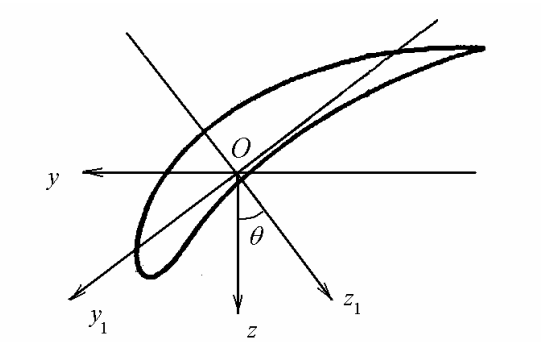


Fig. 3.3

Față de axele centrale principale Oy_1 şi Oz_1, componentele momentului încovoietor sunt

$$\begin{aligned} M_{y_1} &= M_y \cos\theta + M_z \sin\theta, \\ M_{z_1} &= M_z \cos\theta - M_y \sin\theta, \end{aligned} \tag{3.25}$$

momentul centrifugal $I_{y_1 z_1} = 0$, şi relația (3.23) devine

$$\sigma_x = \frac{\overline{N}}{A} - \frac{\overline{M}_{z_1}}{I_{z_1}}\,y + \frac{\overline{M}_{y_1}}{I_{y_1}}\,z - E\alpha T\,, \tag{3.26}$$

în care

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta - I_{yz}\sin 2\theta\ , \tag{3.27}$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta + I_{yz}\sin 2\theta\ . \tag{3.28}$$

3.1.2 Bara liberă la capete

Se consideră o bară static determinată, asupra căreia nu acționează forțe exterioare. În acest caz

$$N = M_y = M_z = 0\,. \tag{3.29}$$

Înlocuind

$$\overline{N} = N_T\,, \qquad \overline{M}_y = M_{Ty}\,, \qquad \overline{M}_z = M_{Tz} \tag{3.30}$$

în relația (3.23), se obțin tensiunile termice în bara liberă la capete

$$\sigma_x = \frac{N_T}{A} - \frac{I_{yz}\,M_{Ty} + I_y\,M_{Tz}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,y + \frac{I_z\,M_{Ty} + I_{yz}\,M_{Tz}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,z - E\alpha T\,. \tag{3.31}$$

Conform relațiilor (3.29), în secțiunile de capăt ale barei

$$\int_A \sigma_x\,\mathrm{d}A = 0\,, \quad \int_A z\,\sigma_x\,\mathrm{d}A = 0\,, \qquad \int_A y\,\sigma_x\,\mathrm{d}A = 0\,, \tag{3.32}$$

în care σ_x este dat de relația (3.31).

Rezultă că σ_x nu este zero în toate punctele secțiunii transversale de capăt, ci are o distribuție autoechilibrată care produce forță axială şi momente încovoietoare rezultante nule. Pe baza principiului lui Saint-Venant, se apreciază că diferența se manifestă doar în vecinătatea capetelor barei, pe o lungime egală cu dimensiunea transversală maximă a barei.

Dacă axele *y* şi *z* sunt axe centrale principale, atunci $I_{yz} = 0$, şi relația (3.31) devine

$$\sigma_x = \frac{N_T}{A} - \frac{M_{Tz}}{I_z}\,y + \frac{M_{Ty}}{I_y}\,z - E\alpha T\,. \tag{3.33}$$

În lungul liniei de ecuație

$$\frac{y}{\mathrm{z}} = \frac{M_{Ty}\,I_z}{M_{Tz}\,I_y} \tag{3.34}$$

tensiunile termice sunt

$$\sigma_x = \frac{N_T}{A} - E\alpha T\,. \tag{3.35}$$

Dacă una din axele *y* şi *z* este axă de simetrie ($I_{yz} = 0$) şi momentul este dirijat în lungul axei *y*, $M_{Tz} = 0$, relația (3.33) devine

$$\sigma_x = \frac{N_T}{A} + \frac{M_{Ty}}{I_y} z - E\alpha T \,. \tag{3.36}$$

3.1.3 Metoda lui Duhamel

Pe baza relației (3.31) se poate explica utilizarea metodei lui Duhamel pentru calculul tensiunilor termice în bare supuse la un câmp neuniform de temperaturi.

Aplicând barei tensiunile longitudinale

$$\sigma'_x = -E\alpha T \,, \tag{3.37}$$

deformația specifică termică longitudinală αT este complet blocată.

Deoarece bara se poate dilata liber lateral, trebuie aplicate tensiuni egale şi de sens contrar în secțiunile din capetele barei, echivalente cu o forță axială N_T şi un moment încovoietor de componente M_{Ty} şi M_{Tz}, care vor elimina orice dilatare. Acestea produc tensiunile

$$\sigma''_x = \frac{N_T}{A} = \frac{E}{A} \int_A \alpha T \, \mathrm{d}A \,, \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} \sigma'''_x &= -\frac{I_{yz} M_{Ty} + I_y M_{Tz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{I_z M_{Ty} + I_{yz} M_{Tz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z = \\ &= -\frac{I_{yz} E \int_A \alpha T z \, \mathrm{d}A - I_y E \int_A \alpha T y \, \mathrm{d}A}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{I_z E \int_A \alpha T z \, \mathrm{d}A - I_{yz} E \int_A \alpha T y \, \mathrm{d}A}{I_y I_z - I_{yz}^2} z. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Tensiunile finale se obțin suprapunând (însumând) tensiunile de blocare (3.37) cu cele de deblocare (3.38) şi (3.39)

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x + \sigma'''_x \,. \tag{3.40}$$

3.1.4 Bare cu secțiunea simetrică

Dacă una din axele *y* şi *z* este axă de simetrie ($I_{yz} = 0$) şi, în plus, momentul este dirijat în lungul axei *y*, $M_{Tz} = 0$, relația (3.36) devine

$$\sigma_x = -E\alpha T + \frac{E\alpha}{A} \int_A T \, \mathrm{d}A + \frac{E\alpha}{I_y} z \int_A T z \, \mathrm{d}A. \tag{3.41}$$

3.1.4.1 Bara cu secțiunea dreptunghiulară

La bara cu secțiune dreptunghiulară (fig. 3.4), $A = bh$, $I_y = bh^3/12$, $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}z$, şi relația (3.41) devine

$$\sigma_x = -E\alpha T(z) + \frac{E\alpha}{h}\int_{-h/2}^{h/2} T(z)\,\mathrm{d}z + \frac{12E\alpha}{h^3}\,z\int_{-h/2}^{h/2} T(z)\,z\,\mathrm{d}z\,. \quad (3.42)$$

Exemplul 3.1

Să se calculeze tensiunile termice în bara în consolă din fig. 3.4, *a*, supusă unei variații de temperatură

$$T(z) = T_0\left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2}\right).$$

Rezolvare

Starea blocată este echivalentă cu o preîncărcare cu tensiuni de compresiune longitudinale (fig. 3.4, *b*)

$$\sigma'_x = -E\,\alpha T_0\left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2}\right).$$

Bara fiind liberă, pentru a suprima blocarea trebuie aplicate o forță axială şi un moment încovoietor la capătul din dreapta.

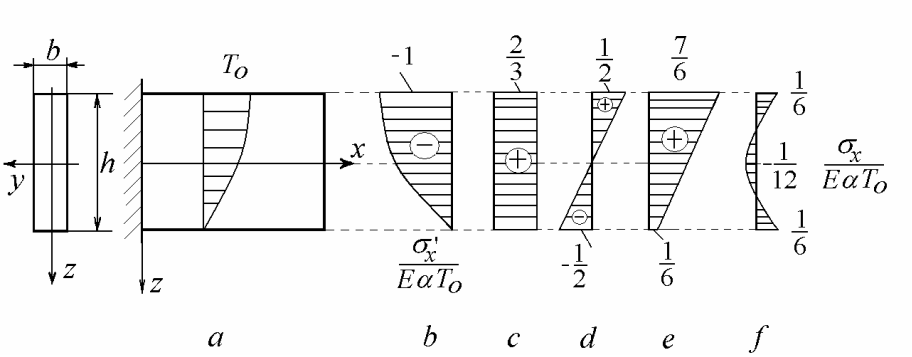


Fig. 3.4

Forța axială N_T produce tensiuni de întindere uniform distribuite (fig. 3.4, *c*)

$$\sigma_x'' = \frac{N_T}{A} = \frac{E\alpha T_0}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) \mathrm{d}z = \frac{2}{3} E\alpha T_0 .$$

Momentul încovoietor M_T produce tensiuni normale distribuite liniar (fig. 3.4, *d*)

$$\sigma_x''' = \frac{12E\alpha T_0}{h^3} z \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) z \, \mathrm{d}z = -E\alpha T_0 \frac{z}{h} .$$

Diagrama tensiunilor de deblocare (fig. 3.4, *e*) se obține însumând diagramele tensiunilor produse de întindere şi încovoiere.

Distribuția finală a tensiunilor termice se obține însumând tensiunile de blocare și cele de deblocare (fig. 3.4, *f*)

$$\sigma_x = E\alpha T_0 \left[-\left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) + \frac{2}{3} - \frac{z}{h} \right] = -E\alpha T_0 \left(\frac{1}{12} - \frac{z^2}{h^2} \right).$$

Exemplul 3.2

Să se arate că variația de temperatură

$$T(z) = T_0 \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^2$$

produce în bara liberă la un capăt tensiuni termice egale şi de sens contrar față de cele de la Exemplul 3.1.

Rezolvare

Tensiunile de blocare sunt

$$\sigma_x' = -E\alpha T_0 \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^2 .$$

Forța axială de deblocare produce tensiunile uniform distribuite

$$\sigma_x'' = \frac{N_T}{A} = \frac{E\alpha T_0}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3} E\alpha T_0 .$$

Momentul încovoietor de deblocare produce tensiunile distribuite liniar

$$\sigma_x''' = \frac{12E\alpha T_0}{h^3} z \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 z \, \mathrm{d}z = -E\alpha T_0 \frac{z}{h}.$$

Acestea sunt produse doar de componenta liniară $-T_0\, z/h$ din legea de variație a temperaturii (aceeaşi în cele două cazuri).

Însumând tensiunile de blocare cu cele de deblocare rezultă

$$\sigma_x = -E\,\alpha T_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) + \frac{1}{3} E\alpha T_0 - E\alpha T_0 \frac{z}{h} = E\alpha T_0 \left(\frac{1}{12} - \frac{z^2}{h^2}\right).$$

3.1.4.2 Bara cu secțiunea triunghiulară

La bara cu secțiune triunghiulară (fig. 3.5, *a*), cu înălțime constantă şi grosime variabilă liniar, $A = bh/2$ şi $I_y = bh^3/36$. Dacă se alege

$$\mathrm{d}A = b\left(\frac{2}{3} - \frac{z}{h}\right)\mathrm{d}z,$$

relația (3.41) devine

$$\sigma_x = -E\alpha T(z) + \frac{2E\alpha}{h} \int_{-h/3}^{2h/3} T(z)\left(\frac{2}{3} - \frac{z}{h}\right)\mathrm{d}z + \frac{36E\alpha}{h^3} z \int_{-h/3}^{2h/3} T(z)\, z \left(\frac{2}{3} - \frac{z}{h}\right)\mathrm{d}z \,. \quad (3.43)$$

Se observă că valoarea tensiunilor termice nu depinde de *b*, deci de raportul b/h.

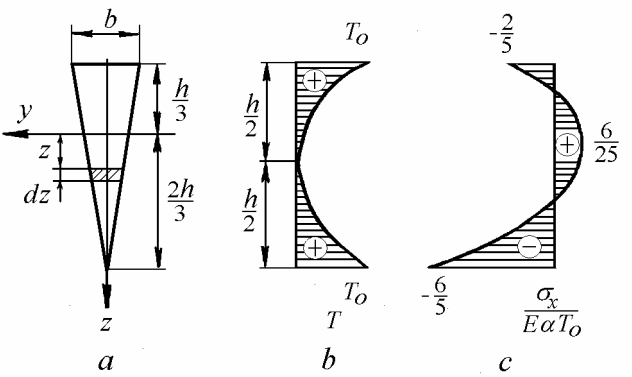


Fig. 3.5

Exemplul 3.3

Să se calculeze tensiunile termice într-o bară liberă la capete, cu secțiune triunghiulară (fig. 3.5, *a*), supusă unei variații de temperatură (fig. 3.5, *b*)

$$T(z)=T_0\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3}\frac{z}{h}+4\frac{z^2}{h^2}\right).$$

Rezolvare

Tensiunile de blocare sunt

$$\sigma_x'=-E\alpha T_0\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3}\frac{z}{h}+4\frac{z^2}{h^2}\right).$$

Forța axială de deblocare produce tensiunile uniform distribuite

$$\sigma_x''=\frac{N_T}{A}=\frac{E\alpha T_0}{A}\int_A\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3}\frac{z}{h}+4\frac{z^2}{h^2}\right)\mathrm{d}A=\frac{E\alpha T_0}{A}\left(\frac{1}{9}A+\frac{4}{h^2}I_y\right)=\frac{1}{3}E\alpha T_0.$$

Momentul încovoietor de deblocare produce tensiunile distribuite liniar

$$\sigma_x'''=\frac{E\alpha T_0}{I_y}z\int_A\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3}\frac{z}{h}+4\frac{z^2}{h^2}\right)z\,\mathrm{d}A=\frac{E\alpha T_0}{I_y}z\left(-\frac{4}{3}\frac{I_y}{h}+\frac{4}{h^2}\int_A z^3\,\mathrm{d}A\right),$$

$$\sigma_x'''=E\alpha T_0\frac{z}{h}\left(-\frac{4}{3}+\frac{144}{h^4}\int_{-h/3}^{2h/3}z^3\left(\frac{2}{3}-\frac{z}{h}\right)\mathrm{d}z\right)=E\alpha T_0\frac{z}{h}\left(-\frac{4}{3}+\frac{8}{15}\right).$$

Rezultă tensiunile termice totale (fig. 3.5, *c*)

$$\sigma_x=E\alpha T_0\left(\frac{2}{9}+\frac{8}{15}\frac{z}{h}-4\frac{z^2}{h^2}\right).$$

3.1.4.3 Bara cu secțiune circulară

La bara cu secțiune circulară (fig. 3.6), $A=\pi a^2$ și $I_y=\pi a^4/4$, unde $a=d/2$. Dacă se alege

$$\mathrm{d}A=2\sqrt{a^2-z^2}\,\mathrm{d}z,$$

relația (3.41) devine

$$\sigma_x = -E\alpha T(z) + \frac{2E\alpha}{\pi a^2}\int_{-a}^{a} T(z)\sqrt{a^2 - z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{8E\alpha}{\pi a^4}\,z\int_{-a}^{a} T(z)z\sqrt{a^2 - z^2}\,\mathrm{d}z\,. \tag{3.44}$$

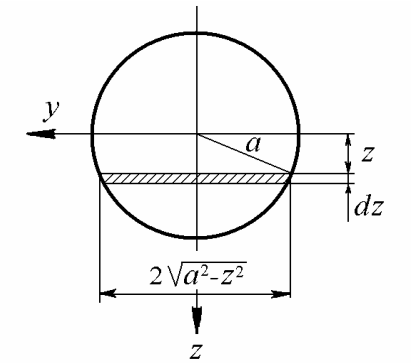


Fig. 3.6

3.1.5 Deformațiile termice ale barelor drepte

Într-o bară omogenă supusă variației de temperatură $T = T(x, z)$, alungirea specifică totală (2.5) este egală cu suma alungirii specifice la nivelul suprafeței "neutre", ε_0, şi a alungirii specifice de încovoiere, z/ρ, unde ρ este raza de curbură a suprafeței neutre

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T = \varepsilon_0 + \frac{z}{\rho}. \tag{3.45}$$

Deoarece

$$\varepsilon_0 = \frac{N_T}{EA} = \frac{1}{EA}\int_A E\alpha T\,\mathrm{d}A = \frac{\alpha}{A}\int_A T\,\mathrm{d}A\,, \tag{3.46}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{Ty}}{EI_y} = \frac{1}{EI_y}\int_A E\alpha T z\,\mathrm{d}A = \frac{\alpha}{I_y}\int_A T z\,\mathrm{d}A\,, \tag{3.47}$$

rezultă

$$\varepsilon_x = \frac{\alpha}{A}\int_A T\,\mathrm{d}A + \frac{\alpha}{I_y}\int_A T z\,\mathrm{d}A\,. \tag{3.48}$$

Deplasarea axială este

$$u = u_0 + \int_0^x \varepsilon_x \, \mathrm{d}x \,, \tag{3.49}$$

unde u_0 este deplasarea axială la $x = 0$.

Deplasarea axială medie este

$$u_m = \frac{1}{A} \int_A u \, \mathrm{d}A = \frac{1}{E} \int_0^x \frac{N_T}{A} \mathrm{d}x \,, \tag{3.50}$$

deci deplasarea capătului liber al barei încastrate este

$$u_m(\ell) = \frac{N_T \ell}{EA} \,. \tag{3.51}$$

Calculul deplasărilor laterale (săgeților) ale barei, *w*, se bazează pe formula curburii

$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \,, \tag{3.52}$$

care se scrie

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M_T}{EI_y} = \frac{\alpha}{I_y} \int_A T z \mathrm{d}A \,, \tag{3.53}$$

de unde rezultă săgeata

$$w = -\int_0^x \left(\int_0^x \frac{M_T}{EI_y} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x + C_1 x + C_2 \,. \tag{3.54}$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită.

Exemplul 3.4

Să se calculeze deformațiile termice ale barei în consolă de la Exemplul 3.1 (fig. 3.4).

Rezolvare

Deplasarea axială a capătului liber este

$$\Delta\ell = \frac{N_T \ell}{EA} = \frac{2}{3} \alpha T_0 \ell \,.$$

Pentru bara încastrată la capătul din stânga, $C_1 = C_2 = 0$. Deoarece momentul încovoietor termic M_T este constant în lungul barei, forma deformată este un arc de cerc, iar săgeata este

$$w = -\frac{M_T x^2}{2EI_y}.$$

Deplasarea capătului barei este

$$w(\ell) = -\frac{M_T \ell^2}{2EI_y} = -\frac{\ell^2}{2\rho}. \tag{3.55}$$

3.2 Lamele bimetalice

În forma cea mai simplă, lamelele bimetalice utilizate la controlul temperaturii sunt formate din două plăcuțe metalice cu coeficienți de dilatare termică liniară diferiți, solidarizate între ele. Prin încălzire (răcire), lamela bimetalică se curbează datorită dilatării diferite a elementelor componente.

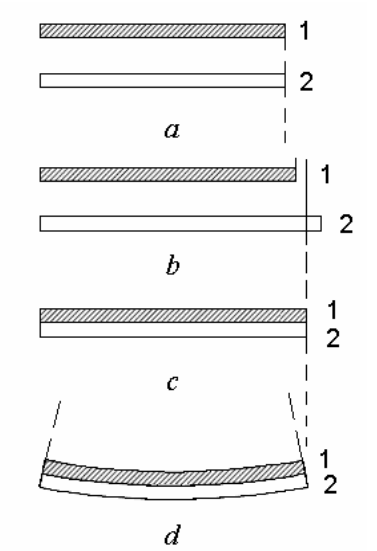


Fig. 3.7

În funcție de modul de rezemare, curbarea lamelei produce deplasări laterale. Interesează determinarea variației curburii lamelei, pe baza căreia se calculează deplasările termice şi, uneori, forțele necesare anulării acestora.

3.2.1 Principiul constructiv

La temperatura de referință cele două lamele au lungimi egale (fig. 3.7, *a*). Dacă $\alpha_2 > \alpha_1$, la creşterea temperaturii cele două lamele tind să se dilate diferit (fig. 3.7, *b*). Când lamelele sunt solidarizate, lungimea finală fiind aceeaşi, cea cu dilatare mică este întinsă şi cea cu dilatare mare este comprimată (fig. 3.7, *c*). Forțele axiale F_1 şi F_2 sunt egale şi de sens contrar (fig. 3.8). Ele produc un moment care este echilibrat de momentele de sens contrar M_1 şi M_2 care curbează lamela în arc de cerc (fig. 3.7, *d*), cu concavitatea de partea stratului cu dilatare mai mică (fig. 3.8).

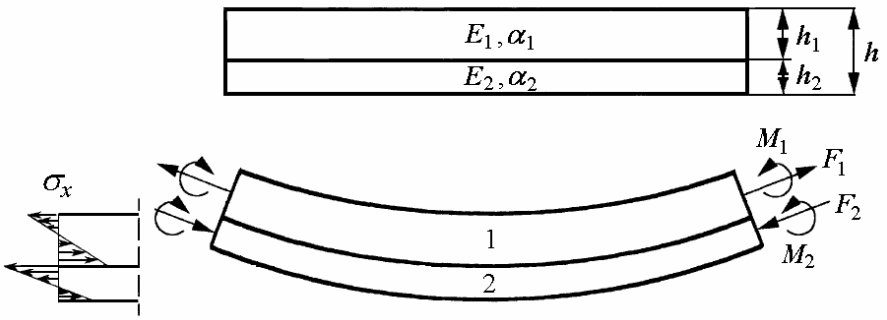


Fig. 3.8

Tensiunile termice produse de momentele încovoietoare termice se însumează cu cele produse de forțele axiale, rezultând distribuții liniare nesimetrice pe grosimea fiecărui strat, cu valori maxime în suprafața de separație (fig. 3.8).

3.2.2 Calculul parametrilor termici

În continuare se analizează cazul în care cele două plăcuțe componente au aceeaşi lățime *b*, grosimi h_1 şi h_2, module de elasticitate E_1, respectiv E_2, şi coeficienți de dilatare termică $\alpha_2 > \alpha_1$ (fig. 3.9).

Lamela bimetalică este încălzită uniform de la T_1 la T_2, cu o variație de temperatură $T = T_2 - T_1$, rezultând o variație a curburii $1/\rho = 1/\rho_2 - 1/\rho_1$, egală cu curbura finală, dacă în starea inițială lamela este dreaptă.

Dacă originea ordonatelor *z* se alege în planul de separație (fig. 3.10, *a*), atunci tensiunile se exprimă sub forma

$$\sigma_{x_1} = -E_1\alpha_1 T + E_1\varepsilon_0 + \frac{E_1}{\rho} z\,, \qquad (3.56,\ a)$$

$$\sigma_{x_2} = -E_2\alpha_2 T + E_2\varepsilon_0 + \frac{E_2}{\rho} z\,, \qquad (3.56,\ b)$$

unde ε_0 este alungirea specifică la nivelul planului de separație, iar ρ este raza de curbură a suprafeței "neutre", în care tensiunile de încovoiere sunt nule.

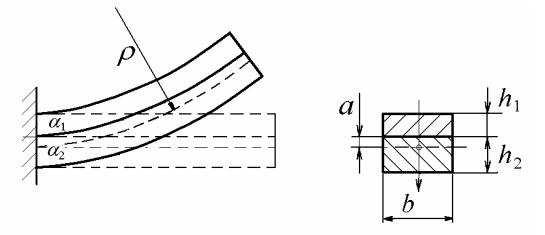


Fig. 3.9

Distanța de la suprafața de separație la suprafața neutră se notează *a*. Dacă originea ordonatelor z^* se alege în suprafața neutră (fig. 3.10, *b*), atunci

$$z^* = z - a\,,$$

deformația specifică la nivelul suprafeței neutre este

$$\varepsilon_0^* = \varepsilon_0 + \frac{a}{\rho} \qquad (3.57)$$

şi tensiunile termice au expresiile uzuale

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= -E_1\alpha_1 T + E_1\left(\varepsilon_0^* - \frac{a}{\rho}\right) + \frac{E_1}{\rho}\left(z^* + a\right) = \\ &= -E_1\alpha_1 T + E_1\varepsilon_0^* + \frac{E_1}{\rho} z^*, \qquad (3.58)\\ \sigma_{x_2} &= -E_2\alpha_2 T + E_2\varepsilon_0^* + \frac{E_2}{\rho} z^*\,.\end{aligned}$$

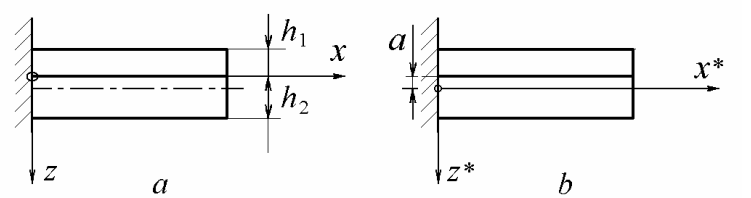


Fig. 3.10

Deoarece asupra lamelei nu acționează sarcini exterioare, forța axială totală şi momentul încovoietor total sunt nule

$$\int_A \sigma_x \, \mathrm{d}A = 0 , \qquad \int_A \sigma_x z \, \mathrm{d}A = 0 . \tag{3.59}$$

Dacă se alege convenabil $\mathrm{d}A = b \, \mathrm{d}z$, la distanța z de suprafața de separație, relațiile (3.59) devin

$$\int_{-h_1}^{0} \sigma_{x_1} \mathrm{d}z + \int_{0}^{h_2} \sigma_{x_2} \mathrm{d}z = 0 , \tag{3.60}$$

$$\int_{-h_1}^{0} \sigma_{x_1} z \, \mathrm{d}z + \int_{0}^{h_2} \sigma_{x_2} z \, \mathrm{d}z = 0 . \tag{3.61}$$

Înlocuind (3.56) în (3.60) rezultă

$$\int_{-h_1}^{0} \left(- E_1 \alpha_1 T + E_1 \varepsilon_0 + \frac{E_1}{\rho} z \right) \mathrm{d}z + \int_{0}^{h_2} \left(- E_2 \alpha_2 T + E_2 \varepsilon_0 + \frac{E_2}{\rho} z \right) \mathrm{d}z = 0 ,$$

sau

$$\left(E_1 h_1 + E_2 h_2 \right) \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \left(E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2 \right) \frac{1}{\rho} = \alpha_1 T E_1 h_1 + \alpha_2 T E_2 h_2 . \tag{3.62}$$

Înlocuind (3.56) în (3.61) rezultă

$$\int_{-h_1}^{0} \left(- E_1 \alpha_1 T + E_1 \varepsilon_0 + \frac{E_1}{\rho} z \right) z \, \mathrm{d}z + \int_{0}^{h_2} \left(- E_2 \alpha_2 T + E_2 \varepsilon_0 + \frac{E_2}{\rho} z \right) z \, \mathrm{d}z = 0 ,$$

sau

$$\frac{1}{2} \left(E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2 \right) \varepsilon_0 + \left(\frac{E_1 h_1^3}{3} + \frac{E_2 h_2^3}{3} \right) \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\alpha_2 T E_2 h_2^2 - \alpha_1 T E_1 h_1^2 \right). \tag{3.63}$$

Ecuațiile (3.62) şi (3.63) se mai scriu sub forma

$$B \, \varepsilon_0 + C \frac{1}{\rho} = F_T , \tag{3.64}$$

$$C \, \varepsilon_0 + D \frac{1}{\rho} = M_T , \tag{3.65}$$

unde s-a notat

$$B = E_1 h_1 + E_2 h_2 , \tag{3.66}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2\right), \tag{3.67}$$

$$D = \frac{E_1 h_1^3}{3} + \frac{E_2 h_2^3}{3}, \tag{3.68}$$

$$F_T = F_{T_1} + F_{T_2}, \quad F_{T_1} = \alpha_1 T E_1 h_1, \quad F_{T_2} = \alpha_2 T E_2 h_2, \tag{3.69}$$

$$M_T = F_{T_2}\frac{h_2}{2} - F_{T_1}\frac{h_1}{2}. \tag{3.70}$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (3.64) şi (3.65) se obține

$$\varepsilon_0 = \frac{F_T D - M_T C}{BD - C^2}, \tag{3.71}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_T B - F_T C}{BD - C^2}. \tag{3.72}$$

Rezultă alungirea specifică la nivelul suprafeței de separație

$$\varepsilon_0 = \frac{4\left(\alpha_1 T E_1 h_1 + \alpha_2 T E_2 h_2\right)\left(E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3\right) - 3\left(\alpha_2 T E_2 h_2^2 - \alpha_1 T E_1 h_1^2\right)\left(E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2\right)}{\left(E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2\right)^2 + 4E_1 h_1 E_2 h_2 \left(h_1 + h_2\right)^2} \tag{3.73}$$

şi curbura lamelei (Y. Villarceau, 1863)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)T}{\left[\dfrac{\left(E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2\right)^2}{E_1 h_1 E_2 h_2 \left(h_1 + h_2\right)^2} + 4\right]\left(h_1 + h_2\right)}. \tag{3.74}$$

Tensiunile termice se obțin înlocuind ε_0 şi $1/\rho$ în relațiile (3.56).

Analizând relațiile de mai sus în spiritul metodei lui Duhamel, se constată următoarele:

Pentru blocarea dilatărilor termice ale celor două lamele componente, se aplică tensiunile $-E_1\alpha_1 T$ şi $-E_2\alpha_2 T$.

Pentru deblocare se aplică forțele axiale termice (pe unitatea de lățime) $F_{T_1} = \alpha_1 T E_1 h_1$ şi $F_{T_2} = \alpha_2 T E_2 h_2$, la distanțele $-h_1/2$, respectiv $h_2/2$ față de suprafața de separație.

Se stabilesc două condiții de deformație: secțiunile din capăt ale celor două lamele componente trebuie să aibă aceleaşi deplasări longitudinale sub acțiunea

celor două forțe, şi aceleaşi rotiri, sub acțiunea momentelor egale şi de sens contrar momentelor acestor forțe față de linia de separație.

Alungirea lamelei este produsă de rezultanta F_T a forțelor axiale termice, în timp ce curbarea (îndoirea) lamelei este produsă de momentul termic rezultant.

Configurația optimă

Sensibilitatea termică maximă a lamelei bimetalice se obține atunci când curbura $1/\rho$ are valoarea maximă. Această condiție se realizează pentru

$$E_2 h_2^2 = E_1 h_1^2 \tag{3.75}$$

când

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\max} = \frac{3\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)T}{2\left(h_1 + h_2\right)}. \tag{3.76}$$

Poziția suprafeței neutre se calculează din condiția $\varepsilon_0^* = 0$. Din (3.58) rezultă $\varepsilon_0 = -a/\rho$, deci $a = -\varepsilon_0 \rho$, sau

$$a = \frac{E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2}{2\left(E_1 h_1 + E_2 h_2\right)}. \tag{3.77}$$

Pentru $E_2 h_2^2 = E_1 h_1^2$ rezultă $a = 0$, deci condiția (3.75) implică situarea suprafeței neutre la nivelul suprafeței de separație a celor două materiale.

Dacă $a = 0$, ecuațiile (3.62) şi (3.63) se decuplează, reducându-se la

$$\left(E_1 h_1 + E_2 h_2\right)\varepsilon_0 = \alpha_1 T E_1 h_1 + \alpha_2 T E_2 h_2,$$

$$\left(\frac{E_1 h_1^3}{3} + \frac{E_2 h_2^3}{3}\right)\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 T E_2 h_2^2 - \alpha_1 T E_1 h_1^2\right),$$

de unde rezultă

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha_1 E_1 h_1 + \alpha_2 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}, \tag{3.78}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)T}{2\left(h_1 + h_2\right)}. \tag{3.79}$$

Configurația practică

În majoritatea aplicațiilor practice, lamelele din cele două materiale au grosimi egale, $h_1 = h_2 = h/2$. În acest caz curbura are expresia

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6}{\frac{1}{4}\frac{E_2}{E_1}\left(1+\frac{E_1}{E_2}\right)^2 + 3}\,\frac{(\alpha_2-\alpha_1)T}{h}. \tag{3.80}$$

Dacă lamela bimetalică este încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, atunci deplasarea capătului liber se calculează, considerând doar încovoierea, cu relația (3.55)

$$w(\ell) = -\frac{\ell^2}{2}\frac{1}{\rho}. \tag{3.81}$$

3.2.3 Curbura specifică

Dacă se notează

$$m = \frac{h_1}{h_2}, \quad n = \frac{E_1}{E_2}, \tag{3.82}$$

variația curburii lamelei (3.74) se scrie

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6}{\frac{\left(1-nm^2\right)^2}{mn(1+m)^2} + 4}\,\frac{(\alpha_2-\alpha_1)T}{h}. \tag{3.83}$$

Analiza relației (3.83) arată că mărimea raportului modulelor de elasticitate $E_1/E_2 = n$ are o influență mică asupra curburii lamelei, astfel încât dacă se consideră $n = 1$ eroarea este sub 3%, valoare în general admisibilă în aplicații industriale. În acest caz se obține relația aproximativă simplificată

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6m}{(1+m)^2}\,\frac{(\alpha_2-\alpha_1)T}{h}. \tag{3.84}$$

Dacă lamelele componente au grosimi egale, atunci $m = 1$, iar curbura (3.84) are expresia aproximativă

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3}{2}\,\frac{(\alpha_2-\alpha_1)T}{h}. \tag{3.85}$$

În standardul ASTM B388 se definește *flexivitatea* egală cu variația curburii unei lamele bimetalice împărțită la variația temperaturii şi înmulțită cu grosimea lamelei

$$k = \frac{1}{\rho}\frac{h}{T}. \tag{3.86}$$

În standardul german DIN 1715 mărimea *k* se numeşte *curbură specifică*.

Din relația (3.85) rezultă că, pentru lamela bimetalică simplă considerată, flexivitatea se calculează aproximativ cu relația

$$k = \frac{3}{2}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right). \tag{3.87}$$

3.2.4 Alungirea specifică

Cu notațiile (3.82), alungirea specifică la nivelul suprafeței de separație (3.73) devine

$$\varepsilon_0 = \frac{4\left(\alpha_1 m n + \alpha_2\right)\left(m^3 n + 1\right) - 3\left(\alpha_2 - \alpha_1 m^2 n\right)\left(1 - m^2 n\right)}{\left(1 - n m^2\right)^2 + 4 m n \left(1 + m\right)^2} T. \tag{3.88}$$

Pentru $m = 1$ se obține

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha_1 n^2 + 7n\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + \alpha_2}{12n + \left(1 + n\right)^2} T. \tag{3.89}$$

În acest caz

$$a = \frac{\left(1 - n\right)h}{4\left(n + 1\right)}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{24n}{\left(1 + n^2\right)^2 + 12n}\frac{\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)T}{h}, \tag{3.90}$$

şi

$$\varepsilon_0^* = \frac{\alpha_1 n + \alpha_2}{n + 1} T, \tag{3.91}$$

relație care se obține şi direct din (3.78), înlocuind $h_1 = h_2 = h/2$.

Pentru $m = 1$ şi $n = 1$,

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} T, \tag{3.92}$$

care este şi alungirea specifică la nivelul suprafeței neutre.

3.2.5 Săgeata termică

Deformația transversală a lamelei bimetalice se calculează în funcție de rază utilizând relații aproximative.

Lamela simplu rezemată

Relația între raza lamelei ρ şi săgeata *d* la mijlocul deschiderii (fig. 3.11) este dată de

$$(\rho + h_2)^2 = (\rho + h_2 - d)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 .$$

Rezultă

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2d}{\ell^2 + 4d^2 - 8dh_2} . \tag{3.93}$$

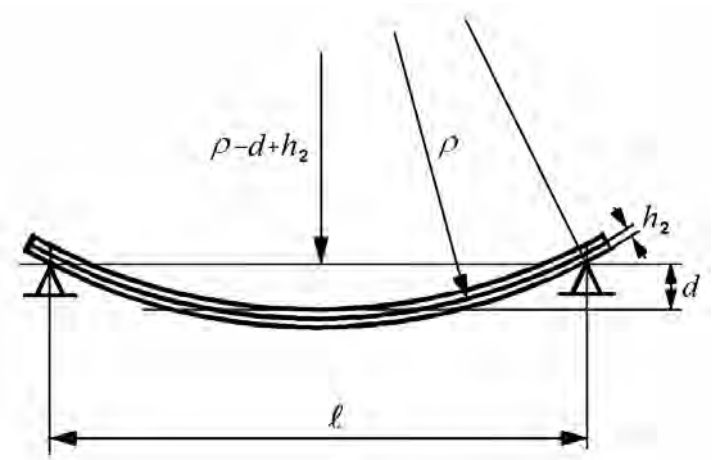


Fig. 3.11

Deoarece, în majoritatea cazurilor practice, săgeata şi grosimea sunt mai mici decât 10% din lungimea lamelei, ultimii doi termeni de la numitor sunt neglijabili față de primul şi expresia (3.93) se reduce la

$$d = \frac{\ell^2}{8}\frac{1}{\rho} . \tag{3.94}$$

Configurația din figura 3.11 este utilizată la determinarea experimentală a flexivității lamelelor bimetalice, conform ASTM B388 şi DIN 1715, utilizând relația

$$k = \frac{8dh}{T\ell^2} . \tag{3.95}$$

Exemplul 3.5

Să se calculeze săgeata la mijlocul unei lamele bimetalice cu lungimea de $100\,\text{mm}$, compusă din două straturi cu grosimea $0{,}5\,\text{mm}$ fiecare, produsă de o creştere a temperaturii cu 100^0C. Se dau $E_1 = 140\,\text{GPa}$, $\alpha_1 = 1{,}7\cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$ (Invar) şi $E_2 = 211\text{GPa}$, $\alpha_2 = 12{,}1\cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$.

Rezolvare. Din (3.83) se obține $1/\rho = 0{,}0015\ \text{mm}^{-1}$, apoi din (3.94) rezultă $d = 1{,}93\,\text{mm}$.

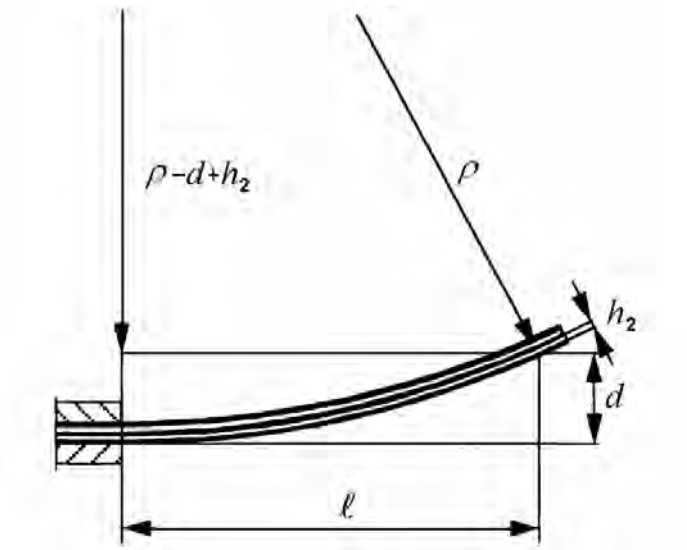


Fig. 3.12

Lamela în consolă

Relația între raza lamelei ρ şi săgeata d la capătul liber (fig. 3.12) este

$$\left(\rho + h_2\right)^2 = \left(\rho + h_2 - d\right)^2 + \ell^2 .$$

Rezultă

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2d}{\ell^2 + 4d^2 - 2dh_2}.$$

Pentru $d^2 << \ell^2$ şi $dh_2 << \ell^2$ se obține (3.81)

$$d = \frac{\ell^2}{2}\frac{1}{\rho}. \qquad (3.96)$$

3.2.6 Tensiuni termice

Pentru $m=1$ şi $n=1$, $E_1=E_2=E$, înlocuind alungirea specifică la nivelul planului de separație (3.92) și raza de curbură a suprafeței "neutre" (3.85) în (3.56), rezultă tensiunile termice (fig. 3.13)

$$\sigma_{x_1}=-E\alpha_1 T+E\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}T+\frac{3}{2}\frac{E(\alpha_2-\alpha_1)T}{h}z,$$

$$\sigma_{x_2}=-E\alpha_2 T+E\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}T+\frac{3}{2}\frac{E(\alpha_2-\alpha_1)T}{h}z,$$

sau

$$\sigma_{x_1}=E\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}T+\frac{3}{2}\frac{E(\alpha_2-\alpha_1)T}{h}z, \qquad (3.97, a)$$

$$\sigma_{x_2}=-E\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}T+\frac{3}{2}\frac{E(\alpha_2-\alpha_1)T}{h}z. \qquad (3.97, b)$$

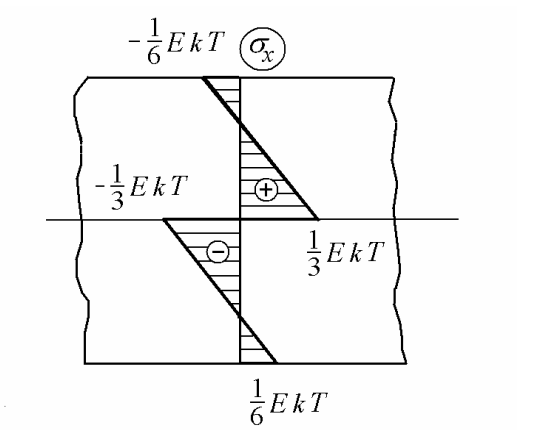


Fig. 3.13

Înlocuind flexivitatea (3.87), expresiile (3.97) devin

$$\sigma_{x_1}=EkT\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{h}\right), \qquad (3.98, a)$$

$$\sigma_{x_2}=EkT\left(-\frac{1}{3}+\frac{z}{h}\right). \qquad (3.98, a)$$

Tensiunile maxime apar la nivelul suprafeței de separație.

3.3 Bare curbe omogene

În general, în secțiunea transversală a unei bare curbe acționează un moment încovoietor şi o forță axială. Formulele de calcul se simplifică atunci când originea axelor se alege în dreptul fibrei neutre de la solicitarea de încovoiere pură. Acțiunea simultană a tensiunilor produse de întindere deplasează axa neutră față de poziția determinată la încovoiere pură. În continuare, pentru simplificarea calculelor, tensiunile termice produse de încălzirea neuniformă se calculează față de axa neutră de la încovoierea pură. Se adoptă ipotezele de la studiul încovoierii pure, considerând în plus acțiunea simultană a forței axiale şi a câmpului de temperaturi.

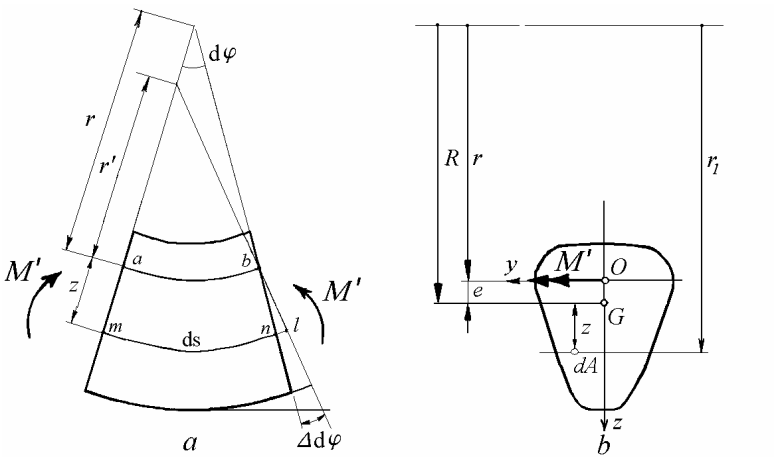


Fig. 3.14

Fie un element de bară curbă (fig. 3.14, *a*), delimitat de două secțiuni plane (între care există unghiul $\mathrm{d}\varphi$) şi solicitat la încovoiere de un moment M', de o forță axială N' şi încălzit într-un câmp de temperaturi cu o variație $T(z)$.

Alungirea specifică a fibrei *mn*, situate la distanța *z* de fibra *ab*, este

$$\varepsilon_s = \frac{z\,\Delta\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}u_0}{(r+z)\mathrm{d}\varphi} - \alpha T\,, \tag{3.99}$$

unde alungirea $\mathrm{d}u_0$ se datorește forței axiale iar α este coeficientul de dilatare termică liniară al materialului barei. Pentru simplificare, în figura 3.14, *a* s-a reprezentat numai deformația produsă de M'.

Utilizând legea lui Hooke, se obține expresia tensiunii normale

$$\sigma = \frac{z}{r+z}E\frac{\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{r}{r+z}E\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}s_0} - E\alpha T\,, \tag{3.100}$$

unde $ab = \mathrm{d}s_0 = r\,\mathrm{d}\varphi$.

Condițiile de echilibru se scriu

$$N' = \int_A \sigma\,\mathrm{d}A, \quad M' = \int_A z\sigma\,\mathrm{d}A. \tag{3.101}$$

Înlocuind (3.100) în (3.101) şi punând condiția (forța axială nulă)

$$\int_A \frac{z}{r+z}\mathrm{d}A = 0, \tag{3.102}$$

care definește poziția axei *Oy*, deci axa față de care se măsoară ordonatele *z*, se obține

$$N' = E\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}s_0}\int_A \frac{r}{r+z}\mathrm{d}A - E\alpha\int_A T\,\mathrm{d}A, \tag{3.103}$$

$$M' = \frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\int_A \frac{z^2}{r+z}\mathrm{d}A - E\alpha\int_A T z\mathrm{d}A. \tag{3.104}$$

Deoarece

$$\int_A \frac{r}{r+z}\mathrm{d}A = A, \qquad \int_A \frac{z^2}{r+z}\mathrm{d}A = Ae,$$

din relațiile (3.103) şi (3.104) se obțin constantele

$$\frac{E\,\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}s_0} = \frac{N' + N'_T}{A}, \quad \frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{M' + M'_T}{Ae}, \tag{3.105}$$

unde

$$N'_T = E\alpha\int_A T\,\mathrm{d}A, \qquad M'_T = E\alpha\int_A T z\mathrm{d}A. \tag{3.106}$$

Înlocuind constantele (3.105) în expresia (3.100) rezultă formula tensiunilor normale

$$\sigma = \frac{z}{r+z}\frac{M' + M'_T}{Ae} + \frac{r}{r+z}\frac{N' + N'_T}{A} - E\alpha T,$$

sau

$$\sigma = E\left[\frac{r}{r+z}\left(z\,\frac{M' + M'_T}{rEAe} + \frac{N' + N'_T}{EA}\right) - \alpha T\right]. \tag{3.107}$$

De remarcat faptul că indicele ‘prim’ din formula (3.107) arată că ordonata *z* se măsoară față de fibra neutră de la încovoierea pură şi deci distribuția de

temperaturi utilizată la calculul ‘eforturilor termice’ (3.106) se calculează corespunzător.

Pentru $T = 0$, relația (3.107) devine

$$\sigma = \frac{r\,z}{r+z}\frac{M'}{I'_y} + \frac{r}{r+z}\frac{N'}{A'}, \tag{3.108}$$

unde proprietățile geometrice reduse sunt

$$I'_y = \int_A \frac{r\,z^2}{r+z}\,\mathrm{d}A = \int_A \frac{r}{r_1} z^2\,\mathrm{d}A = r\,A e\,, \qquad A' = \int_A \frac{r}{r_1}\,\mathrm{d}A = A\,.$$

Tensiunile normale produse de întindere sau compresiune sunt de fapt constante pe înălțimea secțiunii barei. Al doilea termen din membrul drept al expresiei (3.108) apare datorită faptului că forța N' definită de prima relație (3.101) nu este aplicată în centrul de greutate.

Dacă forța axială *N* este aplicată în *G*, atunci redusă în fibra neutră de la încovoierea pură aceasta mai produce un moment $M = N\,e$ şi din (3.108) rezultă

$$\sigma = \frac{z}{r+z}\frac{N\,e}{A\,e} + \frac{r}{r+z}\frac{N}{A} = \frac{N}{A} = const.$$

Dacă ordonatele *z* se calculează față de axa care trece prin centrul de greutate al secțiunii, formula tensiunilor produse la încovoierea pură conține doi termeni, ca în formularea originală a lui Winkler.

3.4 Bare şi cadre static nedeterminate

Deplasările barelor solicitate la încovoiere se pot calcula, utilizând metoda Mohr-Maxwell, cu relația

$$\delta = \int_\ell \frac{M\,m}{E\,I_y}\,\mathrm{d}x\,. \tag{3.109}$$

În expresia (3.109), M este momentul încovoietor în secțiunea *x* a barei solicitate de forțele exterioare, $E\,I_y$ este modulul de rigiditate la încovoiere iar m este momentul încovoietor în secțiunea *x* a barei, produs de o forță egală cu 1 aplicată în punctul şi pe direcția lui δ.

Calculul problemelor simple de bare static nedeterminate se face prin *metoda eforturilor*. Sistemul static nedeterminat (s.s.n.) se transformă într-un

sistem static determinat (s.s.d.) echivalent, prin suprimarea unui număr echivalent de legături. Forțele (sau momentele) din legături se transformă în forțe (momente) exterioare, denumite *necunoscute static nedeterminate*, care se notează distinct cu X_j.

Condițiile de echivalență între s.s.d. echivalent şi s.s.n. iau forma ecuațiilor canonice ale metodei eforturilor (2.17), care sunt condiții de deformație în punctele şi pe direcțiile necunoscutelor static nedeterminate.

În ecuațiile (2.17) coeficienții au forma

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int_{\ell} \frac{m_i m_j}{EI_y} \mathrm{d}x , \tag{3.110}$$

$$\delta_{j0} = \int_{\ell} \frac{M^0 m_j}{EI_y} \mathrm{d}x . \tag{3.111}$$

Rezolvând sistemul (2.17) format din ecuațiile provenite din condițiile de deformație, se obțin necunoscutele static nedeterminate, apoi din ecuațiile de echilibru se determină restul reacțiunilor sau eforturilor care acționează în sistemul static determinat echivalent. Astfel, problema se reduce la studiul sistemului static determinat echivalent.

Exemplul 3.6

Să se calculeze tensiunile termice în bara din fig. 3.15, *a*, cu secțiunea dreptunghiulară, încastrată la un capăt şi simplu rezemată la celălalt capăt, supusă unei variații de temperatură cu distribuție liniară pe înălțime (fig. 3.15, *b*)

$$T(z) = T_m + (T_2 - T_1)\frac{z}{h} .$$

Rezolvare

Sistemul static determinat echivalent se alege bara încastrată la capătul din stânga şi încărcată cu forța verticală X_1 la capătul din dreapta (fig. 3.15, *c*). Condiția de echivalență între s.s.n. şi s.s.d. este

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 ,$$

unde

$$\delta_{11} = \frac{\ell^3}{3EI_y} , \qquad \delta_{10} = -\frac{\ell^2}{2\rho} ,$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\alpha}{I_y}\int_A T\,z\,\mathrm{d}A=\frac{\alpha}{h}\left(T_2-T_1\right).$$

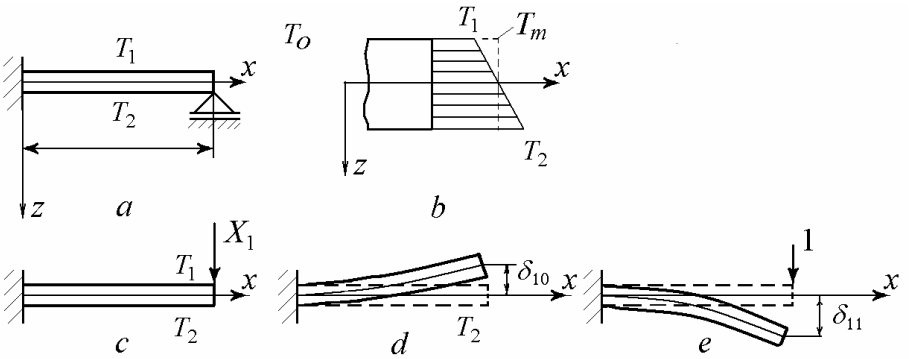


Fig. 3.15

Rezultă

$$X_1=\frac{3}{2}\frac{\alpha\left(T_2-T_1\right)EI_y}{\ell h}.$$

Momentul încovoietor maxim apare în încastrare

$$M_{\max}=-X_1\,\ell=-\frac{3}{2}\frac{\alpha\left(T_2-T_1\right)EI_y}{h}$$

unde tensiunile termice sunt

$$\sigma=-\frac{3}{2}E\alpha\left(T_2-T_1\right)\frac{z}{h}.$$

Pentru distribuția liniară a temperaturii, tensiunile date de expresia (3.41) sunt nule, deci tensiunile din bară sunt produse doar de reacțiunea din reazemul simplu, adică de forța aplicată în capătul barei care anulează săgeata din curbarea barei libere.

Exemplul 3.7

Să se calculeze tensiunile termice în cadrul static nedeterminat din fig. 3.16, *a* supus unei variații constante de temperatură, *T*.

Rezolvare

Sistemul static determinat echivalent este ilustrat în fig. 3.16, *b*. Condiția de echivalență între s.s.n. şi s.s.d. este

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 ,$$

unde

$$\delta_{10} = -\ell \alpha T , \qquad \delta_{11} = \frac{5\ell^3}{3EI_y} ,$$

conform figurilor 3.16, *c* şi *d*.

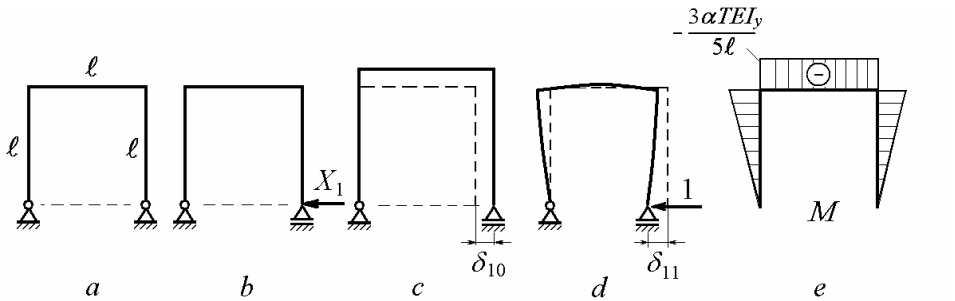


Fig. 3.16

Rezultă

$$X_1 = \frac{3}{5} \frac{\alpha T E I_y}{\ell^2} .$$

Diagrama momentelor încovoietoare termice este redată în fig. 3.16, *e*. Pe baza acesteia se calculează tensiunile termice de încovoiere.

4.
ECUAȚIILE TERMOELASTICITĂȚII PENTRU CORPURI IZOTROPE

În acest capitol se consideră corpuri elastice liniare şi izotrope, în echilibru sub acțiunea forțelor de suprafață, forțelor volumice şi a unei variații de temperatură. Distribuția spațială a temperaturii se presupune cunoscută. Se prezintă pe scurt ecuațiile termoelasticității pentru cazul tridimensional: ecuațiile de echilibru, relațiile între deplasări şi deformații specifice şi ecuațiile de compatibilitate, relațiile între tensiuni şi deformații specifice, şi condițiile la limită pe suprafața corpului. Se descrie rezolvarea în funcție de deplasări şi rezolvarea în funcție de tensiuni. Ecuațiile generale se particularizează pentru starea plană de deformații specifice şi pentru starea plană de tensiuni. Se prezintă metoda lui Duhamel prin care problemele de termoelasticitate se reduc la probleme clasice din teoria elasticității.

4.1 Ecuațiile de echilibru

Se consideră un paralelipiped infinitezimal de dimensiuni *dx*, *dy*, *dz*, decupat dintr-un corp elastic în punctul O (fig. 4.1). În general, pe fiecare față acționează o tensiune normală şi două componente ale tensiunii tangențiale, paralele cu axele triedrului de referință. Tensiunile normale au un singur indice, care defineşte axa cu care sunt paralele. Tensiunile tangențiale au doi indici. Primul indice arată direcția normalei la planul sau fața pe care acționează tensiunea. Al doilea indice arată direcția componentei tensiunii.

Tensiunile sunt pozitive în direcțiile indicate în figură. Pe o *față pozitivă* (cu normala exterioară în sensul pozitiv al axei), tensiunile pozitive sunt dirijate în sensul pozitiv al axelor de coordonate. Pe o *față negativă*, tensiunile pozitive sunt orientate în sensul negativ al axelor de coordonate.

Pe fețele care nu trec prin punctul O, tensiunile se exprimă prin primii doi termeni ai unei dezvoltări în serie Taylor. Se presupune că, în general, elementul

este solicitat de o forță distribuită în volum, de componente *X, Y, Z* (pe unitatea de volum).

Ecuațiile de momente față de centrul elementului conduc la relațiile de dualitate ale tensiunilor tangențiale

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},\ \tau_{yz} = \tau_{zy},\ \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tag{4.1}$$

care sunt complementare două câte două.

Din echilibrul forțelor se obțin ecuațiile diferențiale de echilibru (A. Cauchy, 1822)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Cele şase ecuații (4.1) şi (4.2) conțin nouă necunoscute, deci problemele de analiză a tensiunilor sunt *static nedeterminate* interior.

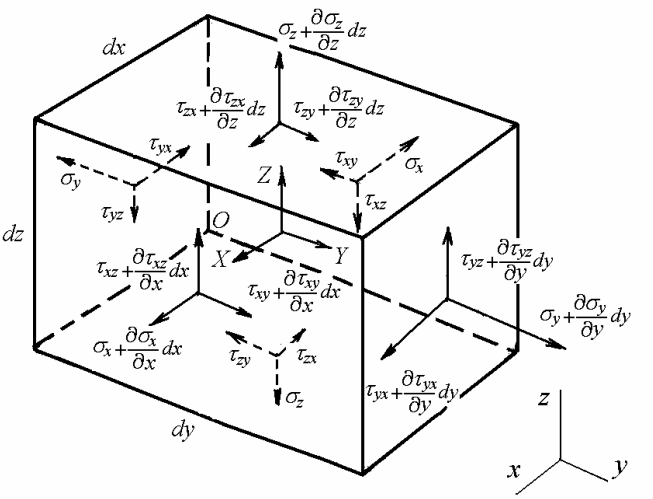


Fig. 4.1

În cazul unui element situat în vecinătatea suprafeței unui corp elastic, ecuațiile de echilibru care se stabilesc între forțele de suprafață şi tensiunile interioare reprezintă *condițiile la limită*.

În fig. 4.2, sarcina distribuită pe suprafață are componentele $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ (pe unitatea de suprafață). Din echilibrul forțelor rezultă

$$\begin{aligned} \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n &= \overline{X}\,, \\ \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n &= \overline{Y}\,, \\ \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n &= \overline{Z}\,, \end{aligned} \tag{4.3}$$

unde *l*, *m*, *n* sunt cosinușii directori ai normalei la suprafață.

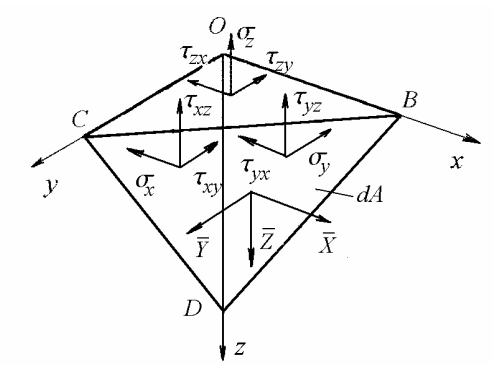


Fig. 4.2

În cazul problemelor bidimensionale, ecuațiile de echilibru (4.1) și (4.2) devin

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,, \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0\,, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0\,, \tag{4.4}$$

iar condițiile de echilibru la suprafață (4.3) se reduc la

$$\sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m = \overline{X}\,, \qquad \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m = \overline{Y}\,. \tag{4.5}$$

4.2 Ecuațiile de compatibilitate

Într-un corp elastic, deplasările unui punct, paralele cu axele *x*, *y*, *z*, se notează *u*, v, *w*. Deformațiile specifice sunt de două feluri: alungiri specifice ε_x, ε_y, ε_z, și lunecări specifice γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

Între deformații specifice și deplasări se stabilesc relațiile

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{4.6}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \qquad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}.$$

Eliminând deplasările din relațiile (4.6) se obțin relații între deformațiile specifice, numite *ecuații de compatibilitate* (Saint-Venant, 1860)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z}, \tag{4.7, a}$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\, \partial x},$$

$$2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right),$$
$$2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right), \tag{4.7, b}$$
$$2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right).$$

Ecuațiile de mai sus exprimă continuitatea câmpului de deplasări, care exclude apariția de goluri sau suprapuneri (două puncte diferite nu pot ocupa aceeaşi poziție în urma deformării corpului), deci deformația fiecărui element de volum trebuie să fie compatibilă cu deformația elementelor vecine.

4.3 Ecuațiile constitutive

Pentru corpuri din materiale elastice, omogene şi izotrope, deformațiile specifice se exprimă în funcție de tensiuni prin *legea lui Hooke generalizată* pentru efecte termice

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha T\,, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\,,$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] + \alpha T\,, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\,, \tag{4.8}$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha T\,, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}\,,$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal, ν este coeficientul de contracție transversală, G este modulul de elasticitate transversal, α este coeficientul de dilatare termică iar T este variația de temperatură.

Se demonstrează că între constantele elastice E, G şi ν există relația

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}. \tag{4.9}$$

Dacă în relațiile (4.8) se exprimă tensiunile în funcție de deformațiile specifice, se obține

$$\sigma_x = \frac{E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\left[\left(1-\nu\right)\varepsilon_x + \nu\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}\,,$$
$$\sigma_y = \frac{E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\left[\left(1-\nu\right)\varepsilon_y + \nu\left(\varepsilon_z + \varepsilon_x\right)\right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}\,, \tag{4.10}$$
$$\sigma_z = \frac{E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\left[\left(1-\nu\right)\varepsilon_z + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}\,,$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}\,,\ \tau_{yz} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{yz}\,,\ \tau_{zx} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{zx}\,. \tag{4.11}$$

Ecuațiile (4.10) şi (4.11) se mai scriu sub forma

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x - \left(3\lambda + 2G\right)\alpha T\,,$$
$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y - \left(3\lambda + 2G\right)\alpha T\,, \tag{4.12}$$
$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z - \left(3\lambda + 2G\right)\alpha T\,,$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}\,,\ \ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}\,,\ \ \tau_{zx} = G\gamma_{zx}\,. \tag{4.11, *a*}$$

unde deformația volumică specifică

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right), \tag{4.13}$$

iar constanta lui Lamé

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{4.14}$$

Constantele elastice E şi ν se exprimă în funcție de constantele lui Lamé λ şi G sub forma

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}. \tag{4.15}$$

4.4 Ecuațiile fundamentale ale termoelasticității

Pentru un câmp de temperaturi dat, comportarea unui corp elastic tridimensional este descrisă de 15 mărimi: şase tensiuni, şase deformații specifice şi trei deplasări. Acestea trebuie să satisfacă 15 ecuații: trei ecuații de echilibru, şase relații între deplasări şi deformații specifice şi şase relații între tensiuni şi deformații specifice. La acestea se adaugă condițiile la limită pentru punctele de pe suprafața corpului, exprimate în funcție de deplasări sau în funcție de sarcinile aplicate. Rezultă că există condiții suficiente pentru obținerea unei soluții. Se demonstrează că în cazul echilibrului stabil această soluție este unică.

Este posibil să se utilizeze unele ecuații pentru a elimina din necunoscute şi a obține un număr redus de ecuații exprimate numai în funcție de deplasări sau numai în funcție de tensiuni.

4.4.1 Ecuațiile fundamentale exprimate în funcție de deplasări

Ecuațiile de echilibru (4.2) pot fi scrise în funcție de deformații specifice utilizând ecuațiile constitutive (4.12) şi (4.11, *a*). Apoi relațiile între deformații specifice şi deplasări (4.6) pot fi utilizate pentru a exprima ecuațiile de echilibru în funcție de deplasări. Se obține

$$\begin{aligned}
&(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u - (3\lambda + 2G)\alpha\frac{\partial T}{\partial x} + X = 0,\\
&(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v - (3\lambda + 2G)\alpha\frac{\partial T}{\partial y} + Y = 0,\\
&(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w - (3\lambda + 2G)\alpha\frac{\partial T}{\partial z} + Z = 0,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

unde operatorul armonic

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.17}$$

iar deformația volumică specifică (4.13) se poate scrie

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{4.18}$$

Pentru porțiunea de suprafață pe care sunt date sarcinile exterioare, condițiile la limită se obțin înlocuind (4.12) în (4.3) şi utilizând (4.6). Rezultă

$$\begin{aligned}
&\lambda e l + G\left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n\right) = \overline{X} + \frac{E\alpha T}{1-2\nu} l\,, \\
&\lambda e m + G\left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n\right) = \overline{Y} + \frac{E\alpha T}{1-2\nu} m\,, \\
&\lambda e n + G\left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n\right) = \overline{Z} + \frac{E\alpha T}{1-2\nu} n\,.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Pentru porțiunea de suprafață pe care sunt specificate deplasările, se dau

$$u = u_1(x, y, z),\ v = v_1(x, y, z),\ w = w_1(x, y, z). \tag{4.20}$$

După rezolvarea problemei în funcție de deplasări, deformațiile specifice se calculează din (4.6) iar tensiunile din (4.12). De notat că nu au fost utilizate ecuațiile de compatibilitate.

Ecuațiile (4.16) în care se neglijează efectele termice se numesc *ecuațiile lui Lamé.*

4.4.2 Ecuațiile fundamentale exprimate în funcție de tensiuni

Ecuațiile de compatibilitate (4.7) se pot rescrie în funcție de tensiuni utilizând întâi (4.8) şi (4.9), apoi ecuațiile de echilibru (4.2). Dacă se notează

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\,, \tag{4.21}$$

se obțin următoarele şase ecuații

$$\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=-\frac{E\alpha}{1+\nu}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla^2T+\frac{\partial^2T}{\partial x^2}\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial X}{\partial x},$$

$$\nabla^2\sigma_y+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=-\frac{E\alpha}{1+\nu}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla^2T+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$\nabla^2\sigma_z+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=-\frac{E\alpha}{1+\nu}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla^2T+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\nabla^2\tau_{xy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}=-\frac{E\alpha}{1+\nu}\frac{\partial^2T}{\partial x\partial y}-\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right), \tag{4.22}$$

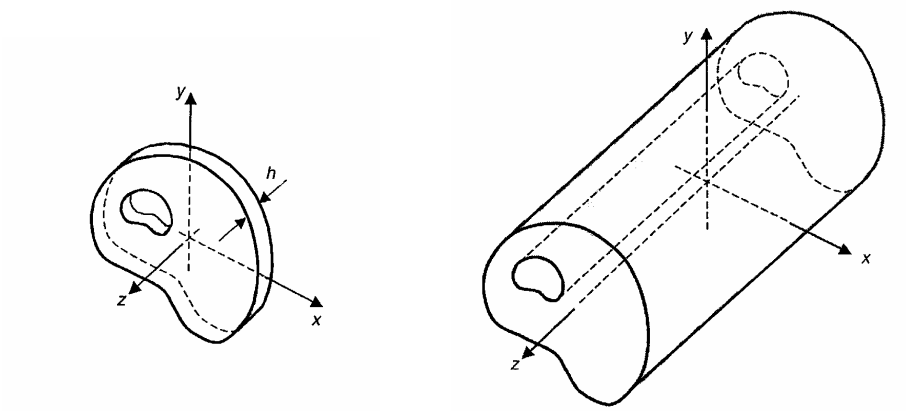
$$\nabla^2\tau_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}=-\frac{E\alpha}{1+\nu}\frac{\partial^2T}{\partial y\partial z}-\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

$$\nabla^2\tau_{zx}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x}=-\frac{E\alpha}{1+\nu}\frac{\partial^2T}{\partial z\partial x}-\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Ecuațiile (4.22) în care se neglijează efectele termice se numesc *ecuațiile Beltrami-Mitchell*.

4.5 Probleme bidimensionale

Dacă unele dintre componentele tensiunilor sau deformațiilor specifice sunt nule sau neglijabile în comparație cu celelalte, ecuațiile teoriei termoelasticității se reduc la probleme bidimensionale, care definesc stări plane de tensiuni sau stări plane de deformații specifice. Este cazul celor două corpuri din fig. 4.3.



a *b*

Fig. 4.3

Discul cu grosime constantă din fig. 4.3, *a* are grosimea mică în comparație cu celelalte două dimensiuni. Discul este într-o *stare plană de tensiuni* dacă: a) pe fețele plane nu acționează forțe de suprafață; b) pe suprafața laterală $\overline{Z}=0$ iar $\overline{X}$ și $\overline{Y}$ nu depind de *z*; și c) în interiorul corpului, $Z=0$ iar *X*, *Y* și *T* sunt independente de *z*.

Cilindrul din fig. 4.3, *b* are lungimea mare în raport cu dimensiunile transversale. Cilindrul este într-o *stare plană de deformații specifice* dacă: a) deplasările axiale ale capetelor cilindrului sunt blocate, $w=0$; b) pe suprafața laterală $\overline{Z}=0$ iar $\overline{X}$ și $\overline{Y}$ nu depind de *z*; și c) în interiorul corpului, $Z=0$ iar *X*, *Y* și *T* sunt independente de *z*.

Se reamintește faptul că o stare plană de tensiuni conduce la o stare spațială de deformații specifice, și invers, o stare plană de deformații specifice este produsă de o stare spațială de tensiuni.

4.5.1 Starea plană de deformații specifice

O stare plană de deformații specifice este definită de $w=0$, $u=u(x,y)$ și $v=v(x,y)$. Deformațiile specifice sunt funcții doar de *x* și *y*:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4.23}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ \ \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\ \ \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{4.24}$$

Înlocuind $\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$ în ecuațiile (4.12) și (4.11, *a*), rezultă expresiile tensiunilor în funcție de deformațiile specifice

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\lambda\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)+2G\varepsilon_x-\left(3\lambda+2G\right)\alpha T,\\ \sigma_y&=\lambda\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)+2G\varepsilon_y-\left(3\lambda+2G\right)\alpha T,\\ \tau_{xy}&=G\gamma_{xy}\end{aligned} \tag{4.25}$$

și

$$\sigma_z=\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)-E\alpha T,\ \tau_{yz}=\tau_{zx}=0,\ \tau_{zx}=G\gamma_{zx}. \tag{4.26}$$

Ecuațiile (4.25) se scriu în funcție de deplasări sub forma

$$\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2G\frac{\partial u}{\partial x}-\left(3\lambda+2G\right)\alpha T\,,$$
$$\sigma_y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2G\frac{\partial v}{\partial y}-\left(3\lambda+2G\right)\alpha T\,, \qquad (4.27)$$
$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Primele două ecuații (4.25) se mai scriu

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\,\varepsilon_y\right]-\frac{E\alpha T}{1-2\nu}\,,$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\,\varepsilon_x+(1-\nu)\varepsilon_y\right]-\frac{E\alpha T}{1-2\nu}\,.$$

Ecuațiile de echilibru devin

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0. \qquad (4.28)$$

Singura ecuație de compatibilitate este

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}\,. \qquad (4.29)$$

Înlocuind deformațiile specifice în funcție de tensiuni

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)+(1+\nu)\,\alpha T\,,$$
$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right)+(1+\nu)\,\alpha T\,,$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\,,$$

rezultă condiția de compatibilitate

$$\nabla^2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)+\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{E\alpha}{1-\nu}\nabla^2 T=0\,. \tag{4.30}$$

Se obțin astfel trei ecuații (4.28) şi (4.30) cu trei necunoscute, σ_x, σ_y şi τ_{xy} care împreună cu condițiile la limită

$$\sigma_x\,l+\tau_{xy}\,m=\overline{X}\,,\quad \tau_{yx}\,l+\sigma_y\,m=\overline{Y}\,, \tag{4.31}$$

permit rezolvarea problemelor de stări plane de deformații specifice în funcție de tensiuni.

Înlocuind (4.27) în (4.28) se obțin ecuațiile generale în deplasări

$$\begin{aligned} &G\nabla^2 u+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{E}{1-2\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x}+X=0,\\ &G\nabla^2 v+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{E}{1-2\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial y}+Y=0, \end{aligned} \tag{4.32}$$

unde

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,. \tag{4.33}$$

4.5.2 Starea plană de tensiuni

O stare plană de tensiuni este definită de un câmp de tensiuni de forma

$$\sigma_x=\sigma_x\left(x,y\right),\quad \sigma_y=\sigma_y\left(x,y\right),\quad \tau_{xy}=\tau_{xy}\left(x,y\right), \tag{4.34, *a*}$$

$$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0\,. \tag{4.34, *b*}$$

Aceasta reprezintă o bună aproximare pentru plăci sau discuri subțiri în direcția *z*, încărcate cu sarcini uniform distribuite pe grosime, paralele cu planul plăcii.

Deformațiile specifice termoelastice sunt date de legea lui Hooke

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\,\sigma_y\right)+\alpha T\,, && \gamma_{xy}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{xy}\,,\\ &\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\,\sigma_x\right)+\alpha T\,, && \gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0\,,\\ &\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)+\alpha T\,. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Exprimând tensiunile în funcție de deformațiile specifice, se obține

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu},$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \qquad (4.36)$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \quad \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Ecuațiile de echilibru (4.28) şi cele de compatibilitate a deformațiilor specifice (4.29) sunt aceleaşi ca pentru starea plană de deformații specifice.

Ecuațiile de echilibru exprimate în funcție de deplasări sunt

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{E}{1-\nu}\,\alpha\frac{\partial T}{\partial x} - X,$$
$$\frac{E}{2(1+\nu)}\nabla^2 v + \frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{E}{1-\nu}\,\alpha\frac{\partial T}{\partial y} - Y, \qquad (4.37)$$

iar relația de compatibilitate a tensiunilor este

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + (1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + E\alpha\,\nabla^2 T = 0. \qquad (4.38)$$

care în absența forțelor volumice devine

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y + E\alpha T\right) = 0. \qquad (4.38, a)$$

Condițiile la limită (4.19) se scriu

$$\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)l + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)m\right] = \overline{X} + \frac{E\alpha T}{1-\nu}l,$$
$$\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)m + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)l\right] = \overline{Y} + \frac{E\alpha T}{1-\nu}m. \qquad (4.39)$$

Relațiile (4.38) şi (4.39) permit rezolvarea problemei în funcție de deplasări.

4.5.3 Conversia ecuațiilor între cele două stări plane

Se poate arăta că prin transformarea corespunzătoare a constantelor E, ν şi α (Tabelul 4.1) toate problemele de stări plane de tensiuni pot fi transformate în problema corespunzătoare a stării plane de deformații specifice şi vice versa.

Astfel, rezolvând un tip de problemă plană, se poate obține apoi direct soluția pentru celălalt tip de problemă plană printr-o simplă transformare a constantelor de material.

Tabelul 4.1

Conversia ecuațiilor	E	ν	α
	se înlocuieşte cu		
de la starea plană de tensiuni la starea plană de deformații specifice	$\dfrac{E}{1-\nu^2}$	$\dfrac{\nu}{1-\nu}$	$(1-\nu)\alpha$
de la starea plană de deformații specifice la starea plană de tensiuni	$\dfrac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}$	$\dfrac{\nu}{1+\nu}$	$\dfrac{1+\nu}{1+2\nu}\alpha$

Exemplul 4.1

Să se calculeze tensiunile termice în bara de la Exemplul 3.1 (fig. 3.4, *a*), supusă unei variații de temperatură

$$T(z)=T_0\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}-\frac{z^2}{h^2}\right),$$

utilizând condiția de compatibilitate (4.38, *a*).

Rezolvare

În planul *xOz* relația (4.38, *a*) se scrie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\sigma_x+\sigma_z+E\alpha T)=0\,.$$

Deoarece $\sigma_z=0$ şi $\sigma_x=\sigma_x(z)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\sigma_x+E\alpha T)=0\,,$$

de unde rezultă

$$\sigma_x = -E\alpha T + c_1 z + c_2 .$$

Constantele de integrare c_1 şi c_2 se determină din condiţiile ca forţa axială şi momentul încovoietor să fie nule la capătul liber

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, \mathrm{d}z = 0 , \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, z \, \mathrm{d}z = 0 .$$

Înlocuind expresia lui σ_x în relaţiile de mai sus, rezultă

$$c_1 = \frac{12E\alpha}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T \, z \, \mathrm{d}z , \quad c_2 = \frac{E\alpha}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T \, \mathrm{d}z ,$$

deci se regăseşte relaţia generală (3.42) de calcul al tensiunilor termice

$$\sigma_x = E\alpha \left(-T + \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T \, \mathrm{d}z + \frac{12}{h^3} z \int_{-h/2}^{h/2} T \, z \, \mathrm{d}z \right) .$$

Pentru distribuţia dată de temperaturi se obţine

$$\sigma_x = E\alpha T_0 \left[-\left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) + \frac{2}{3} - \frac{z}{h} \right] = -E\alpha T_0 \left(\frac{1}{12} - \frac{z^2}{h^2} \right).$$

4.6 Principiul metodei lui Duhamel

Fie un corp elastic tridimensional supus unui câmp cunoscut de temperaturi $T = T(x, y, z)$. Dacă dilatările termice sunt libere, atunci în orice punct

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T(x, y, z) . \tag{4.40}$$

Se presupune că mişcarea tuturor punctelor corpului este total împiedicată. Dilatările împiedicate sunt definite prin deformaţii specifice

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\alpha T . \tag{4.41}$$

Această blocare se realizează aplicând corpului o presiune hidrostatică *p*, deci tensiuni normale principale

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p\,. \tag{4.42}$$

Înlocuind tensiunile (4.42) şi deformaţiile specifice (4.41) în legea lui Hooke fără efecte termice

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

se obține

$$p = \frac{E\alpha T}{1-2\nu}, \tag{4.43}$$

deci starea de tensiuni care realizează blocarea (“bridarea”) este definită de

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\frac{E\alpha T}{1-2\nu}, \tag{4.44}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\,.$$

Pentru a menține acest câmp de tensiuni, trebuie aplicate:

a) un sistem de forțe superficiale, normale la suprafața corpului, de intensitate $-E\alpha T/\left(1-2\nu\right)$ pe unitatea de suprafață; şi

b) un sistem de forțe distribuite în volum, necesare pentru echilibrul acestui element.

Deoarece în cazul blocajului total nu pot apare tensiuni tangențiale, ecuațiile de echilbru fără efecte termice iau forma simplă

$$X = -\frac{\partial\sigma_x}{\partial x},\quad Y = -\frac{\partial\sigma_y}{\partial y},\quad Z = -\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}, \tag{4.45}$$

ceea ce, ținând cont de (4.44), conduce la

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E\alpha T}{1-2\nu}\right) = \frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x},\quad Y = \frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y},\quad Z = \frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{4.46}$$

Prin urmare, rezolvarea problemei termoelastice se poate face utilizând relațiile clasice ale teoriei elasticității (fără efecte termice), suprapunând tensiunile şi deformaţiile calculate pentru corpul solicitat prin sarcini de suprafață şi de volum, egale şi de sens contrar celor aplicate pentru blocarea deformaţiilor corpului, cu cele obținute pentru starea inițială blocată.

Rezumând, în metoda lui Duhamel se parcurg trei etape de calcul:

1) Se presupune că deformațiile termice sunt blocate de un sistem de forțe convenabil ales. Se evaluează aceste forțe.

2) Se aplică aceleiaşi structuri (nesupusă la *T*) un sistem de forțe egale şi de sens contrar celor calculate la (1) şi se calculează tensiunile şi deformațiile.

3) Se suprapun stările (1) şi (2). Deplasările reale sunt cele calculate la (2). Tensiunile se obțin prin însumarea valorilor obținute la (1) şi (2).

4.7 Forma matricială a ecuațiilor constitutive

4.7.1 Notații matriciale

Se introduce vectorul coloană al tensiunilor

$$\{\sigma\} = \lfloor \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \rfloor^T, \tag{4.47}$$

vectorul coloană al deformațiilor specifice

$$\{\varepsilon\} = \lfloor \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \rfloor^T, \tag{4.48}$$

şi vectorul coloană al deplasărilor

$$\{u\} = \lfloor u \quad v \quad w \rfloor^T. \tag{4.49}$$

Deformațiile specifice produse de dilatarea liberă se reprezintă prin vectorul deformațiilor specifice termice

$$\{\varepsilon_T\} = \lfloor \alpha T \quad \alpha T \quad \alpha T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rfloor^T. \tag{4.50}$$

4.7.2 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice

Relațiile (4.8) se scriu matricial sub forma

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\varepsilon_T\}, \tag{4.51}$$

unde *matricea complianței elastice a materialului* este

$$[C]=\frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & \text{sim} & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Relațiile (4.10) şi (4.11) se scriu matricial sub forma

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_T\}). \quad (4.53)$$

unde *matricea de rigiditate a materialului* este

$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ & \text{sim} & & & 0.5-\nu & 0 \\ & & & & & 0.5-\nu \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

În cazul stării plane de tensiuni, relațiile (4.36) devin

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}-\frac{E\alpha T}{1-\nu}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

deci

$$[D]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

În cazul stării plane de deformații specifice, relațiile (4.25) devin

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}-\frac{E\alpha T}{1-2\nu}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

deci matricea de rigiditate are forma

$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}. \qquad (4.58)$$

4.8 Considerații generale

În general, ordinul de mărime al tensiunilor termice poate fi reprezentat de valorile tensiunilor necesare pentru a anula complet dilatarea termică liberă. Pentru câteva cazuri particulare simple, valorile tensiunilor termice se pot calcula direct din ecuațiile generale ale termoelasticității, după cum urmează:

1. Într-o bară de secțiune constantă, încălzită cu *T*, la care dilatarea este împiedicată la capete (fig. 2.3), se dezvoltă tensiuni termice de compresiune de mărime $E\alpha T$.

2. Într-o placă plană (în planul *x*-*y*) de grosime constantă și de formă oarecare, încălzită uniform cu *T*, în care dilatarea este împiedicată pe contur, se produc tensiuni termice de compresiune σ_x și σ_y de mărime $E\alpha T/(1-\nu)$.

3. Într-un solid de formă oarecare, încălzit uniform cu *T*, în care dilatarea liberă este blocată pe toată suprafața exterioară (incluzând găurile) se produc tensiuni termice de compresiune σ_x, σ_y și σ_z de mărime $E\alpha T/(1-2\nu)$.

4. Dacă o parte sau întreaga suprafață a unui solid liber este răcită brusc cu *T*, inițial, înainte ca variația temperaturii să cuprindă straturile din vecinătatea suprafeței, în stratul superficial se dezvoltă tensiuni de întindere $E\alpha T/(1-\nu)$.

5. Într-un solid liber, de formă oarecare, supus la o variație neuniformă a temperaturii de forma $T(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$, unde A,B,C,D sunt constante sau funcții de timp, nu se produc tensiuni termice. Orice distribuție neliniară a temperaturii produce tensiuni termice.

5.
CILINDRI ŞI DISCURI AXIAL-SIMETRICE

În acest capitol se studiază cilindri circulari plini, tuburi cu pereți groşi, discuri circulare şi inele subțiri încărcate şi/sau încălzite într-un câmp termic axial-simetric. Tensiunile normale şi deformațiile radiale într-un punct depind de o singură variabilă - raza în punctul respectiv.

Cilindrii plini şi tuburile cu pereți groşi au lungimea mare în raport cu dimensiunile transversale. Se consideră că deplasările axiale sunt nule, deci cilindrul este într-o stare plană de deformații specifice. Această condiție este îndeplinită doar de cilindri încastrați la capete sau de lungime infinită. În cilindri liberi la capete, pentru a impune realizarea unei stări plane de deformații specifice trebuie suprapuse tensiuni axiale care să anuleze forțele axiale la capete. Secțiunile transversale plane ale cilindrilor rămân plane şi după aplicarea solicitării, fiind exclusă încovoierea sau răsucirea tubului.

Discurile şi inelele au grosimea mică în comparație cu celelalte două dimensiuni, fiind solicitate la o *stare plană de tensiuni*. Nu există tensiuni axiale iar cele din planul discului (inelului) se consideră constante pe grosime. Discurile în rotație sunt studiate în Capitolul 6.

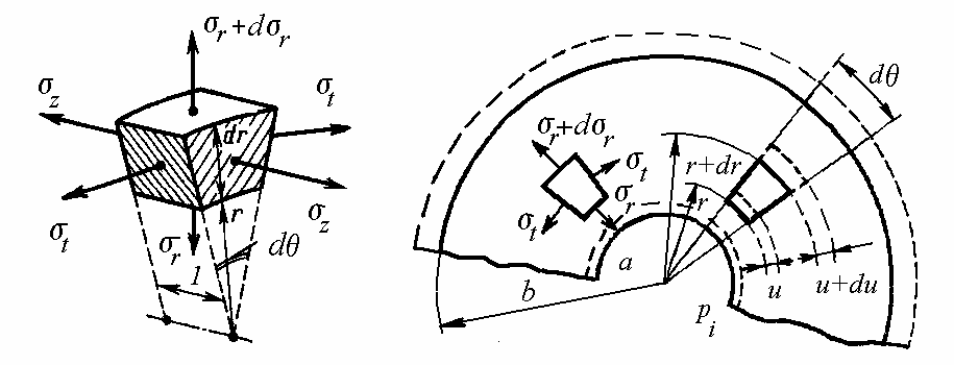
Calculul tensiunilor termice în cilindri lungi şi discuri subțiri are aplicații practice la recipientele cu presiune interioară mare din instalațiile petro-chimice, cilindrii motoarelor cu ardere internă şi ai preselor hidraulice, carcasele turbinelor şi compresoarelor, țevile de răcire ale reactoarelor nucleare şi ale schimbătoarelor de căldură, țevile pereților membrană ai generatoarelor de abur, țevile tunurilor etc.

5.1 Ecuațiile fundamentale

În general, pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate este necesară utilizarea a patru tipuri de relații: 1) *ecuații de echilibru*; 2) *ecuații* care descriu geometria *deformațiilor* sau compatibilitatea între deformații specifice şi deplasări; 3) *ecuații constitutive* între tensiuni şi deformații specifice; şi 4) *condiții la limită*, de rezemare sau de solicitare pe contur.

5.1.1 Ecuația de echilibru

Se consideră un inel cu grosimea egală cu unitatea, tăiat dintr-un tub sau disc axial-simetric, din care se detașează un element prin două plane axiale şi două suprafețe cilindrice concentrice infinit vecine (fig. 5.1, *a*). Datorită simetriei, pe fețele acestui element nu acționează tensiuni tangențiale (de forfecare).



a *b*

Fig. 5.1

Fie σ_t tensiunea normală circumferențială şi σ_r tensiunea normală radială. Aceasta din urmă variază cu raza r şi pe suprafața exterioară este $\sigma_r + \mathrm{d}\sigma_r$. Tensiunea axială se notează σ_z.

Ecuația de proiecții a forțelor pe bisectoarea unghiului $\mathrm{d}\theta$ (fig. 5.1, *a*) se scrie, aproximând $\sin(\mathrm{d}\theta/2) \approx \mathrm{d}\theta/2$,

$$\sigma_r\, r\,\mathrm{d}\theta + 2\sigma_t\,\mathrm{d}r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2} - \left(\sigma_r + \frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\right)(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta = 0,$$

$$\sigma_t = \sigma_r + r\,\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r},$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\sigma_r \cdot r) = \sigma_t. \qquad (5.1)$$

5.1.2 Relațiile între deformații specifice şi deplasări

Dacă *u* este deplasarea radială a unui punct de pe suprafața cilindrului de rază *r* (fig. 5.1, *b*), atunci deplasarea unui punct de pe suprafața cilindrului de rază $r + \mathrm{d}r$ este $u + (\mathrm{d}u/\mathrm{d}r)\mathrm{d}r$.

Alungirea radială este egală cu diferența deplasărilor capetelor segmentului $\mathrm{d}r$, deci $\mathrm{d}u$. Alungirea specifică radială se obține împărțind alungirea radială la lungimea inițială $\mathrm{d}r$

$$\varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}. \tag{5.2}$$

Cercul de rază r devine cercul de rază $r+u$, deci alungirea pe direcție circumferențială este $2\pi\left(r+u\right)-2\pi r = 2\pi u$. Prin împărțire la lungimea inițială $2\pi r$ se obține alungirea specifică circumferențială

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}. \tag{5.3}$$

Eliminând deplasarea u între relațiile (5.2) şi (5.3) se obține ecuația de compatibilitate (continuitate)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\varepsilon_t \cdot r\right) = \varepsilon_r. \tag{5.4}$$

5.1.3 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice

Legea lui Hooke cu efecte termice (4.8) se scrie

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_t + \sigma_z\right)\right] + \alpha T, \tag{5.5}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu\left(\sigma_z + \sigma_r\right)\right] + \alpha T, \tag{5.6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_t\right)\right] + \alpha T, \tag{5.7}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară al materialului.

Pentru simplificarea expunerii se neglijează variația lui α cu temperatura. De asemenea se consideră că modulul de elasticitate $E = const.$, ceea ce la oțel este valabil pentru temperaturi sub $300^{\circ}C$.

Relațiile (5.5)-(5.7) se simplifică în cazul stărilor plane de tensiuni şi deformații specifice, după cum se arată în Capitolul 4.

5.1.4 Condițiile la limită

Condițiile la limită dau valorile tensiunilor radiale σ_r la $r = a$ (sau $r = 0$) şi $r = b$.

5.2 Cilindri groşi

Tubul cu pereți groşi este un cilindru lung cu gaură centrală circulară. Se consideră cilindri supuşi unui regim termic staționar, în care temperatura variază pe grosimea peretelui dar este constantă în orice secțiune transversală în lungul tubului. Tensiunile termice sunt generate de încălzirea neuniformă. Dacă variația temperaturii este constantă în lungul razei tubului, nu apar tensiuni termice. Tensiunile termice în tuburi cu pereți groşi au fost studiate prima dată de J. M. C. Duhamel (1838).

Cilindrul lung este într-o *stare plană de deformații specifice*, ceea ce este strict valabil doar dacă este fixat la capete. La un cilindru liber la capete, pentru a menține starea plană de deformații specifice, trebuie aplicate tensiuni axiale la capete care, conform principiului lui Saint-Venant, produc efecte locale doar la capetele cilindrului.

5.2.1 Câmp termic axial-simetric

În continuare se consideră cilindri circulari lungi, supuşi la o variație de temperatură axial-simetrică $T = T(r)$. Aceasta se determină prin rezolvarea problemei specifice de transfer de căldură.

5.2.1.1 Distribuție arbitrară a temperaturii

Se presupune că cilindrul este fixat la capete, astfel încât deplasările axiale sunt nule, $w = 0$, ceea ce implică o stare plană de deformații specifice, $\varepsilon_z = 0$. Relația (5.7) devine

$$\sigma_z = \nu\,(\sigma_r + \sigma_t) - E\alpha T\,. \tag{5.8}$$

Înlocuind (5.8) în expresiile (5.5) şi (5.6) se obțin deformațiile specifice

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E}\,[\,(1-\nu)\,\sigma_r - \nu\,\sigma_t + E\alpha T\,], \tag{5.9}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1+\nu}{E}\,[\,(1-\nu)\,\sigma_t - \nu\,\sigma_r + E\alpha T\,]. \tag{5.10}$$

Înlocuind (5.9) şi (5.10) în (5.4), rezultă a doua relație între tensiuni

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\sigma_t \cdot r) = \sigma_r - \frac{E\alpha r}{1-\nu}\cdot\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,. \tag{5.11}$$

Eliminând σ_t între relațiile (5.1) şi (5.11), se obține ecuația diferențială de tip Euler

$$r\frac{\mathrm{d}^2\sigma_r}{\mathrm{d}r^2}+3\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}=-\frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}, \tag{5.12}$$

sau, într-o formă uşor de integrat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\sigma_r\right)\right]=-\frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{5.13}$$

Soluția ecuației (5.13) este

$$\sigma_r=C_1-\frac{C_2}{r^2}-\frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r, \tag{5.14}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare.

Deoarece

$$\sigma_r+\sigma_t=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\sigma_r\right), \tag{5.15}$$

expresia (5.12) se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sigma_r+\sigma_t\right)=-\frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \tag{5.16}$$

de unde se obține

$$\sigma_r+\sigma_t=-\frac{E\alpha}{1-\nu}T+2C_1. \tag{5.17}$$

Înlocuind (5.14) rezultă expresia tensiunilor circumferențiale

$$\sigma_t=C_1+\frac{C_2}{r^2}+\frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r-\frac{E\alpha T}{1-\nu}, \tag{5.18}$$

Din (5.8) rezultă tensiunile termice axiale

$$\sigma_z=-\frac{E\alpha T}{1-\nu}+2\nu C_1\ . \tag{5.19}$$

Pentru a menține $w=0$, la capetele tubului trebuie aplicate forțe axiale care să producă tensiunile axiale (5.19).

În continuare se calculează doar tensiunile termice, produse de variația temperaturii, considerând că presiunile aplicate la interiorul şi exteriorul tubului sunt nule, deci la $r=a$, $\sigma_r=0$ şi la $r=b$, $\sigma_r=0$.

Din (5.14) rezultă

$$C_1=\frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{1}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r, \qquad C_2=a^2C_1. \tag{5.20}$$

Înlocuind constantele (5.20) în (5.14) şi (5.18) rezultă tensiunile radiale şi circumferențiale în cilindrul lung

$$\sigma_r=\frac{E\alpha}{(1-\nu)\,r^2}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r-\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r\right), \tag{5.21}$$

$$\sigma_t=\frac{E\alpha}{(1-\nu)\,r^2}\left(\frac{r^2+a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r+\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r-Tr^2\right). \tag{5.22}$$

Înlocuind constantele (5.20) în (5.19) rezultă tensiunile axiale (longitudinale)

$$\sigma_z=\frac{E\alpha}{1-\nu}\left(\frac{2\nu}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\mathrm{d}r-T\right). \tag{5.23}$$

Expresia (5.23) este valabilă doar pentru cilindri fixați la capete $(w=0)$. În cazul cilindrilor cu capete libere, trebuie suprapuse tensiuni normale axiale constante $\sigma_z=s_0$ astfel încât forța axială rezultantă la fiecare capăt să fie nulă

$$N=s_0\,\pi\left(b^2-a^2\right)-\int_a^b \sigma_z 2\pi r\mathrm{d}r=0. \tag{5.24}$$

Adăugând s_0 la tensiunile date de (5.23) rezultă formula tensiunilor axiale

$$\sigma_z=\frac{E\alpha}{1-\nu}\left(\frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r-T\right), \tag{5.25}$$

relație care diferă de (5.23) prin factorul ν din fața integralei.

La cilindrul liber la capete, tensiunile radiale şi circumferențiale au aceleaşi expresii (5.21) şi (5.22).

5.2.1.2 Distribuție logaritmică a temperaturii

Dacă transferul de căldură prin conducție în peretele cilindric se face cu flux termic constant, atunci distribuția radială a temperaturii este logaritmică.

Legea conducției termice (J. Fourier, 1822) se scrie sub forma

$$Q = k\frac{A}{L}\Delta T\,, \tag{5.26}$$

unde Q este fluxul termic, k este conductivitatea termică a materialului, A este aria suprafeței de conducție, L – lungimea traseului de conducție şi ΔT – variația temperaturii pe traseul de conducție.

Pentru un inel cu grosimea egală cu unitatea, decupat dintr-un tub prin două suprafețe cilindrice coaxiale de rază r, respectiv $r + \mathrm{d}r$, se calculează $A = 2\pi r \cdot 1$, $L = \mathrm{d}r$, deci formula (5.26) devine

$$Q = -k\frac{2\pi r}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}T\,. \tag{5.27}$$

În cazul unui *flux termic staționar*, $Q = const.$ şi atunci când conductivitatea termică nu variază cu temperatura, $k = const.$, relația (5.27) se mai scrie

$$r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q}{2\pi k} = const. = c_1\,, \qquad \mathrm{d}T = c_1\frac{\mathrm{d}r}{r}\,,$$

de unde rezultă temperatura la raza r

$$T = c_1\int\frac{\mathrm{d}r}{r} + c_2 = c_1\ln r + c_2\,. \tag{5.28}$$

Se subînțelege că temperaturile T sunt de fapt diferențe între temperatura reală şi o temperatură de referință a mediului ambiant.

Dacă se notează T_i - temperatura peretelui interior şi T_e - temperatura peretelui exterior (fig. 5.2), din condițiile $T\big|_{r=a} = T_i$, $T\big|_{r=b} = T_e$, rezultă

$$T = T_e + \frac{T_i - T_e}{\ln\dfrac{a}{b}}\ln\frac{r}{b}\,. \tag{5.29}$$

Pentru studiul tensiunilor termice, primul termen din relația (5.29) se poate neglija, deoarece corespunde încălzirii uniforme, care nu produce tensiuni termice. De aceea, în continuare se va considera următoarea distribuție axial-simetrică a temperaturii în lungul razei, exprimată în grade Celsius

$$T = \frac{T_0}{\ln(a/b)} \ln \frac{r}{b}, \qquad T_0 = T_i - T_e. \tag{5.30}$$

Dacă fluxul de căldură este de la interior spre exterior $(T_0 > 0)$, atunci peretele interior încălzit mai puternic tinde să se dilate, dilatând straturile exterioare ale tubului. Peretele exterior se opune, producând comprimarea straturilor interioare ale tubului. Rezultă dilatare la exterior şi comprimare la interior.

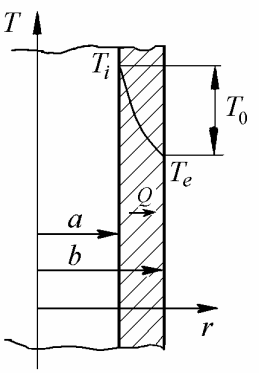


Fig. 5.2

Dacă distribuția radială a temperaturii este (5.30), efectuând integralele în expresiile (5.21), (5.22) şi (5.25) rezultă

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)} \left(\frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{\frac{b^2}{r^2}-1}{\frac{b^2}{a^2}-1} \right), \tag{5.31}$$

$$\sigma_t = -\frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)} \left(\frac{\ln \frac{b}{r}-1}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{\frac{b^2}{r^2}+1}{\frac{b^2}{a^2}-1} \right), \tag{5.32}$$

$$\sigma_z = -\frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)} \left(\frac{2\ln \frac{b}{r}-1}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{2}{\frac{b^2}{a^2}-1} \right). \tag{5.33}$$

Tensiunile circumferențiale şi cele axiale au valori extreme egale pe suprafața interioară şi cea exterioară a tubului, unde tensiunile radiale de natură termică sunt nule

$$r = b, \qquad \sigma_{t_2} = \sigma_{z_2} = \frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)} \left(\frac{1}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{2}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right), \tag{5.34}$$

$$r = a, \qquad \sigma_{t_1} = \sigma_{z_1} = \frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)} \left(\frac{1}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{2\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right). \tag{5.35}$$

Relațiile de mai sus au fost stabilite de M. T. Huber în 1904.

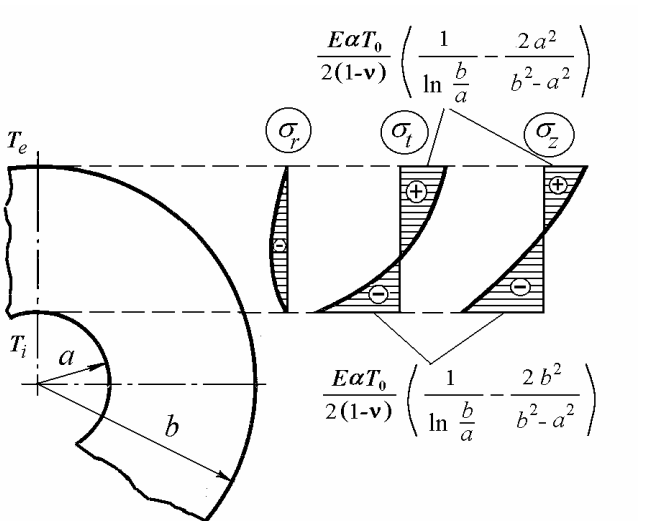


Fig. 5.3

În figura 5.3 se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor σ_r, σ_t și σ_z în lungul razei, pentru $T_0 > 0$. Se observă că tensiunile maxime apar pe suprafața interioară a tubului, dar sunt de compresiune locală. Coşurile de fum din cărămidă, piatră sau beton, încălzite la interior, pot avea fisuri pe suprafața exterioară, solicitată la întindere locală.

Exemplul 5.1

Să se determine tensiunile de la interiorul unui tub cu $b = 3a$, $T_0 = 40^o C$, $E = 210\,\text{GPa}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$, $\nu = 0{,}3$.

Rezolvare

Din relațiile (5.31) și (5.35) se obține $\sigma_r = 0$ și

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{z_1} = \frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)}\left[\frac{1}{\ln(b/a)} - \frac{2b^2}{b^2-a^2}\right] = -96{,}5\,\text{MPa},$$

deci valori relativ mari, chiar pentru o diferență relativ mică de temperatură.

5.2.2 Câmp termic axial nesimetric

Calculul tensiunilor termice produse de câmpuri de temperatură axial nesimetrice depășește cadrul acestui curs introductiv. În aplicațiile legate de încălzirea țevilor de la o sursă exterioară laterală de căldură se folosesc programe de calcul specializate.

În cazul fluxului termic constant, T trebuie să fie o funcție periodică de unghiul θ, care poate fi reprezentată prin serii Fourier. Pentru temperaturi care variază în lungul conturului exterior și interior, rezolvarea problemei de transfer termic conductiv staționar conduce la o soluție de forma

$$T = c_1 \ln r + c_2 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n r^n + C_n r^{-n}\right)\cos n\theta + \left(-B_n r^n + D_n r^{-n}\right)\sin n\theta\right]. \qquad (5.36)$$

Tensiunile termice radiale și circumferențiale au două componente. Prima componentă corespunde distribuției logaritmice axial-simetrice și are forma (5.31), respectiv (5.32). A doua componentă depinde doar de coeficienții C_1 și D_1 și are forma

$$\sigma_r' = -\frac{E\alpha}{2(1-\nu)}\frac{r}{a^2+b^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)\left(C_1\cos\theta + D_1\sin\theta\right), \qquad (5.37)$$

$$\sigma_t' = -\frac{E\alpha}{2(1-\nu)}\frac{r}{a^2+b^2}\left(3-\frac{a^2+b^2}{r^2}-\frac{a^2b^2}{r^4}\right)\left(C_1\cos\theta + D_1\sin\theta\right). \qquad (5.38)$$

Tensiunile axiale se calculează cu relația (5.8).

Tensiunile termice tangențiale au forma

$$\tau_{rt} = -\frac{E\alpha}{2(1-\nu)}\frac{r}{a^2+b^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)\left(C_1\sin\theta - D_1\cos\theta\right), \qquad (5.39)$$

5.3 Tuburi nesolicitate termic

Formulele tensiunilor termice pentru cilindri groşi au fost stabilite determinând constantele de integrare din expresia (5.14) considerând că presiunile la exteriorul şi interiorul tubului sunt nule.

În cazul tuburilor solicitate simultan de presiuni radiale şi câmpuri termice, tensiunile totale se pot calcula fie determinând constantele de integrare în expresiile (5.14) pentru condițiile la limită respective, fie aplicând principiul suprapunerii efectelor, adunând la tensiunile termice cele produse de alte solicitări. Pentru utilizarea celei de-a doua metode, în continuare se prezintă pe scurt relațiile de calcul al tensiunilor produse în cilindri groşi de presiuni radiale axial-simetrice.

5.3.1 Ecuațiile lui Lamé

Pentru $T = 0$, din relațiile (5.14) şi (5.18) se obține

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \tag{5.40}$$

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \tag{5.41}$$

Dacă $\sigma_z = 0$, deformația specifică longitudinală este constantă

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_r + \sigma_t\right) = const., \tag{5.42}$$

deci secțiunile plane rămân plane şi după deformarea cilindrului.

Dacă cilindrul este închis la capete, forța axială este $N = p_i\,\pi a^2 - p_e\,\pi b^2$, deci tensiunile longitudinale au valoarea constantă

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi\left(b^2 - a^2\right)} = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2}. \tag{5.43}$$

Condițiile la limită

Constantele C_1 şi C_2 se obțin din condiția ca pe suprafața interioară şi cea exterioară a cilindrului, tensiunea radială σ_r să fie egală şi de semn contrar presiunilor p_i şi respectiv p_e:

$$\text{la } r = a,\ \sigma_r = -p_i, \text{ la } r = b,\ \sigma_r = -p_e. \tag{5.44}$$

Rezultă

$$C_1 = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2}, \qquad C_2 = \frac{(p_i - p_e)\, a^2 b^2}{b^2 - a^2}, \tag{5.45}$$

care înlocuite în (5.40) şi (5.41) conduc la expresiile tensiunilor

$$\sigma_t, \sigma_r = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \pm \frac{1}{r^2} \frac{(p_i - p_e) a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \tag{5.46}$$

Se observă că

$$\sigma_r + \sigma_t = 2C_1 = const. \tag{5.47}$$

Spre deosebire de cazul încărcării termice care produce tensiuni longitudinale variabile pe grosimea peretelui, în cazul încărcării cu presiuni radiale acestea sunt constante în lungul razei tubului.

În cazul stării plane de deformații specifice $\sigma_z = 2\nu C_1$.

Deplasarea radială a unui punct situat la raza *r* este, conform (5.3),

$$u = \varepsilon_t r = \frac{r}{E} \left[\sigma_t - \nu \left(\sigma_r + \sigma_z \right) \right], \tag{5.48}$$

sau, ținând cont de relațiile (5.40) şi (5.41),

$$u = C_1 \frac{1-\nu}{E} r + C_2 \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r} - \frac{\nu \sigma_z}{E} r, \tag{5.49}$$

$$u = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \frac{1-\nu}{E} r + \frac{(p_i - p_e) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r} - \frac{\nu \sigma_z r}{E}. \tag{5.50}$$

Relațiile (5.46) şi (5.50), stabilite de G. Lamé în 1833, sunt valabile şi atunci când presiunile p_i şi p_e variază liniar în lungul tubului.

5.3.2 Tub cu presiune interioară

Se consideră un tub cu pereți groşi, supus numai la presiune interioară p_i, la care tensiunile longitudinale sunt neglijabile.

Înlocuind $p_e = 0$ în relațiile (5.46), se obțin expresiile tensiunilor din tub

$$\sigma_t, \sigma_r = p_i \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 \pm \frac{b^2}{r^2} \right). \tag{5.51}$$

Pe suprafața interioară, pentru $r = a$, tensiunile au valorile

$$\sigma_{t_1} = p_i \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \qquad \sigma_{r_1} = -p_i . \tag{5.52}$$

Pe suprafața exterioară, pentru $r = b$, se obține

$$\sigma_{t_2} = p_i \frac{2a^2}{b^2 - a^2}, \qquad \sigma_{r_2} = 0 . \tag{5.53}$$

Raportul între tensiunea circumferențială maximă şi cea minimă este

$$\frac{\sigma_{t\,\max}}{\sigma_{t\,\min}} = \frac{\sigma_{t_1}}{\sigma_{t_2}} = \frac{b^2 + a^2}{2a^2} . \tag{5.54}$$

Pentru $b = 1{,}1a$, când raportul între rază şi grosimea peretelui este aproximativ 10:1, diferența între tensiunea circumferențială maximă şi cea minimă este aproximativ 10%. Aceasta este baza pentru definiția clasică a unui cilindru cu pereți subțiri. La cilindri subțiri, raportul între rază şi grosimea peretelui este mai mare decât 10:1.

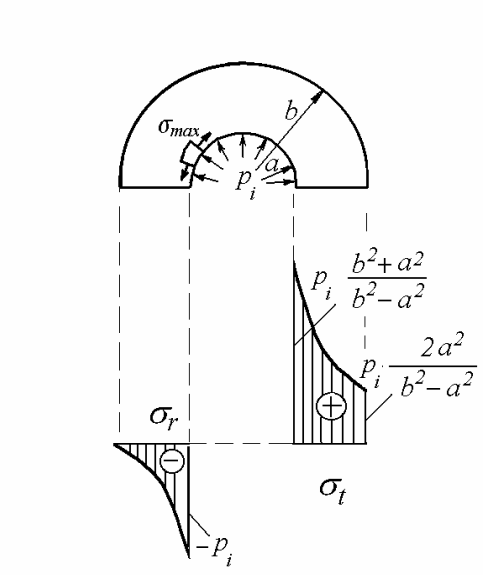


Fig. 5.4

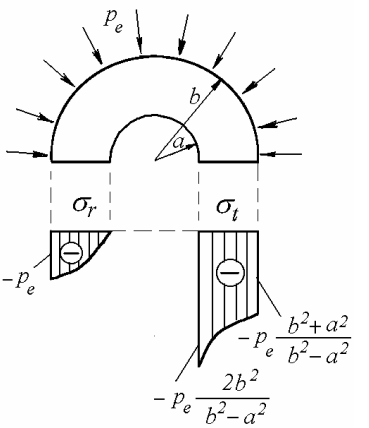


Fig. 5.5

În figura 5.4 se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor σ_r şi σ_t în lungul razei. Tensiunile maxime apar pe suprafața interioară a tubului.

Tensiunea echivalentă la interior, conform teoriei a IIIa de rezistență, este

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} = p_i \frac{2b^2}{b^2 - a^2} . \tag{5.55}$$

Din condiția ca tensiunea echivalentă să fie mai mică sau egală cu rezistența admisibilă σ_a, rezultă relația de dimensionare

$$\frac{b}{a} \geq \sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_a - 2p_i}}. \tag{5.56}$$

Pentru $p_i = \sigma_a/2$, raportul razelor $b/a \to \infty$, tensiunea echivalentă este mai mare ca rezistența admisibilă σ_a chiar pentru grosimi foarte mari ale tubului, deci apar deformații plastice.

Pentru solicitări în domeniul elastic, conform teoriei a IIIa de rezistență, presiunea interioară p_i nu poate depăşi valoarea $\sigma_c/2$, unde σ_c este limita de curgere a materialului tubului. Fretajul permite creşterea presiunii interioare până la valoari apropiate de σ_c.

Deplasarea radială a unui punct de pe suprafața interioară a tubului este

$$u\big|_{r=a} = \frac{a\,p_i}{E}\left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \nu\right). \tag{5.57}$$

5.3.3 Tub cu presiune exterioară

Se consideră un tub cu pereți groşi, supus numai la presiune exterioară p_e, la care tensiunile longitudinale sunt neglijabile.

Înlocuind $p_i = 0$ în relațiile (5.46), se obțin expresiile tensiunilor

$$\sigma_t, \sigma_r = -p_e \frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 \pm \frac{a^2}{r^2}\right). \tag{5.58}$$

Pe suprafața interioară, pentru $r = a$, se obține

$$\sigma_{t_1} = -p_e \frac{2b^2}{b^2 - a^2}, \qquad \sigma_{r_1} = 0. \tag{5.59}$$

Pe suprafața exterioară, pentru $r = b$, tensiunile au valorile

$$\sigma_{t_2} = -p_e \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{r_2} = -p_e. \tag{5.60}$$

În figura 5.5 se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor σ_t și σ_r în lungul razei. Tensiunile circumferențiale maxime apar pe suprafața interioară a tubului şi sunt de compresiune locală, ceea ce constituie un avantaj.

Dacă se micşorează diametrul interior, $a \to 0$, tensiunile circumferențiale $\sigma_{t_2} \to -p_e$ și $\sigma_{t_1} \to -2\,p_e$. Pentru cilindrul fără gaură $\sigma_{t_1} = -p_e$, deci gaura lucrează ca un concentrator de tensiuni.

Deplasarea radială a unui punct de pe suprafața exterioară a tubului este

$$u\big|_{r=b} = -\frac{b\,p_e}{E}\left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu\right). \qquad (5.61)$$

5.4 Cilindri subțiri şi țevi

Cilindrul cu perete subțire este tubul la care raportul între rază şi grosimea peretelui este mai mare decât 10:1. În acest caz, ipoteza distribuției liniare a tensiunilor circumferențiale pe grosimea peretelui conduce la erori neglijabile.

5.4.1 Distribuție logaritmică a temperaturii

Se notează

$$\frac{b}{a} = 1 + m\,. \qquad (5.62)$$

Rezultă grosimea peretelui în funcție de raza interioară

$$h = b - a = ma\,. \qquad (5.63)$$

Când grosimea peretelui este mică în comparație cu raza interioară a cilindrului

$$\ln\frac{b}{a} = \ln(1+m) \cong m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - ....$$

Pentru valori mici ale lui *m* se poate considera

$$\ln\frac{b}{a} \cong m\,. \qquad (5.64)$$

Înlocuind (5.62) şi (5.63) în (5.34) şi (5.35) se obține

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{z_1} = -\frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)}\left(1+\frac{m}{3}\right), \tag{5.65}$$

$$\sigma_{t_2} = \sigma_{z_2} = \frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)}\left(1-\frac{m}{3}\right). \tag{5.66}$$

La *cilindri foarte subțiri* se neglijează $m/3$ față de 1 şi rezultă

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{z_1} = -\frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)}, \tag{5.67}$$

$$\sigma_{t_2} = \sigma_{z_2} = \frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)} \tag{5.68}$$

iar variația tensiunilor circumferențiale şi axiale pe grosimea peretelui este liniară.

Distribuția tensiunilor este aceeaşi ca în cazul unei plăci plane de grosime $2c = b - a$, încastrată pe contur pentru eliminarea încovoierii, când distribuția temperaturii este $T = T_0\, z/(b-a)$.

5.4.2 Distribuție liniară a temperaturii

Pentru o distribuție liniară a temperaturii pe grosimea peretelui, de ecuație

$$T = T_0\,\frac{b-r}{b-a}, \tag{5.69}$$

efectuând integralele în (5.21), (5.22) şi (5.25), se obțin următoare expresii ale tensiunilor termice

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T_0}{3(1-\nu)\left(b^2-a^2\right)}\left[(a+b)\,r - \left(a^2+ab+b^2\right) + \frac{a^2b^2}{r^2}\right], \tag{5.70}$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha T_0}{3(1-\nu)\left(b^2-a^2\right)}\left[2(a+b)\,r - \left(a^2+ab+b^2\right) - \frac{a^2b^2}{r^2}\right], \tag{5.71}$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T_0}{1-\nu}\left[\frac{b+2a}{3(b+a)} - \frac{b-r}{b-a}\right]. \tag{5.72}$$

Tensiunile circumferențiale şi cele longitudinale pe suprafața interioară şi cea exterioară a cilindrului au expresiile

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{z_1} = -\frac{E\alpha T_i}{1-\nu}\frac{a+2b}{3(b+a)}, \tag{5.73}$$

$$\sigma_{t_2} = \sigma_{z_2} = \frac{E\alpha T_i}{1-\nu}\frac{b+2a}{3(b+a)}, \tag{5.74}$$

deci tensiunea maximă apare la interior şi este de compresiune. Aproximația liniară se poate aplica la cilindri cu $h << b$.

La cilindri foarte subțiri, pentru $b \approx a$, relațiile de mai sus devin

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{z_1} = -\frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)},$$

$$\sigma_{t_2} = \sigma_{z_2} = \frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)},$$

fiind identice cu (5.67) şi (5.68).

5.4.3 Câmp termic axial nesimetric

În continuare se prezintă direct rezultatele studiului tensiunilor termice în cilindri cu pereți încălziți axial nesimetric (Goodier, 1937).

Fie θ coordonata unghiulară măsurată față de o rază oarecare. Temperatura interioară T_i şi temperatura exterioară T_e sunt funcții doar de θ şi pot fi dezvoltate în serii Fourier

$$T_i = A_0 + A_1\cos\theta + ... + B_1\sin\theta \ ,$$

$$T_e = A_0' + A_1'\cos\theta + ... + B_1'\sin\theta \ .$$

Tensiunile termice pot fi exprimate doar în funcție de cei 6 coeficienți.

Tensiunile circumferențiale (de încovoiere) extreme sunt

$$\sigma_t = \pm\frac{1}{2}\frac{E\alpha}{1-\nu}\left[A_0 - A_0' + (A_1 - A_1')\cos\theta + (B_1 - B_1')\sin\theta\right],$$

de întindere la interior.

Tensiunea circumferențială maximă este

$$\sigma_{t_{\max}} = \frac{1}{2}\frac{E\alpha}{1-\nu}\left[A_0 - A_0' \pm \sqrt{(A_1 - A_1')^2 + (B_1 - B_1')^2}\right],$$

după cum A_0 este mai mare sau mai mic decât A_0'.

Tensiunile longitudinale extreme, la distanță de capetele libere, sunt

$$\sigma_{z_{\max}} = E\alpha \left[\frac{1}{2}\left(T_i + T_e\right) \pm \frac{1}{2}\left(T_i - T_e\right) + \frac{1}{2}\left(A_0 + A_0'\right) \right],$$

cu semnul plus la exterior. A_0 şi A_0' sunt temperaturile medii la interior şi exterior.

Se observă că tensiunile sunt independente de diametru şi de grosimea peretelui, depinzând doar de material şi de câmpul de temperaturi.

Ca exemplu, se consideră un tub încălzit la o temperatură exterioară

$$T_e = T_i + \frac{1}{2} T_0 \left(1 + \cos\theta\right),$$

unde temperatura interioară T_i este menținută constantă. Rezultă că T_0 este diferența maximă de temperatură la exterior. Distribuția este simetrică în raport cu axa față de care se măsoară unghiul θ, pe direcția căreia temperaturile sunt T_i $\left(\theta = \pi\right)$, respectiv $T_i + T_0$ $\left(\theta = 0\right)$.

Tensiunile circumferențiale maxime sunt

$$\sigma_{t_{\max}} = \pm \frac{1}{2} \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \ ,$$

în partea cea mai caldă $\left(\theta = 0\right)$, de întindere la interior şi de compresiune la exterior.

Tensiunile longitudinale extreme, departe de capetele libere, sunt aproximativ $-\frac{3}{4} E\alpha T_0$ la interior şi $\frac{1}{4} E\alpha T_0$ la exterior, în partea cea mai încălzită $\left(\theta = 0\right)$.

5.5 Cilindri plini

Pentru un cilindru fără gaură centrală, de exemplu un arbore cu secțiune circulară plină, se înlocuieşte limita inferioară a integralelor din expresiile (5.14) şi (5.20) cu $a = 0$. La $r = 0$, deplasarea radială este nulă, deci $C_2 = 0$.

Constanta C_1 se determină din condiția ca la $r = b$, $\sigma_r = 0$. Înlocuind $a = 0$ în (5.20) se obține

$$C_1 = \frac{E\,\alpha}{\left(1-\nu\right) b^2} \int_0^b T r \mathrm{d}r \,, \qquad (5.75)$$

deci expresiile (5.21), (5.22) şi (5.25) devin

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r - \int_0^r Tr\,\mathrm{d}r \right), \tag{5.76}$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r + \int_0^r Tr\,\mathrm{d}r - Tr^2 \right), \tag{5.77}$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha}{1-\nu}\left(\frac{2}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r - T \right). \tag{5.78}$$

5.6 Discuri cu grosimea constantă, în repaus

Se consideră discuri cu grosimea constantă, fără sarcini radiale exterioare, pentru care se cunoaşte distribuţia axial simetrică $T = T(r)$ a câmpului termic staţionar. Discurile sunt solicitate la o *stare plană de tensiuni*. Tensiunile axiale sunt nule.

5.6.1 Discul cu gaură concentrică

În cazul stării plane de tensiuni, pentru $\sigma_z = 0$, legea lui Hooke se scrie

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_t\right) + \alpha T, \tag{5.79}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_r\right) + \alpha T, \tag{5.80}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_r + \sigma_t\right) + \alpha T. \tag{5.81}$$

Înlocuind deformaţiile specifice (5.79) şi (5.80) în relaţia de compatibilitate (5.4) rezultă a doua relaţie între tensiuni

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sigma_t r\right) - \sigma_r = -E\alpha r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{5.82}$$

Eliminând tensiunea circumferenţială între relaţiile (5.1) şi (5.82), se obţine ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma_r}{\mathrm{d}r^2}+\frac{3}{r}\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}=-E\alpha\,\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \tag{5.83}$$

sau, într-o formă uşor de integrat,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\sigma_r\right)\right]=-E\alpha\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{5.84}$$

Soluția ecuației (5.84) este

$$\sigma_r=C_1-\frac{C_2}{r^2}-\frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r, \tag{5.85}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare.

Înlocuind (5.85) în (5.1) se obțin expresiile tensiunilor circumferențiale

$$\sigma_t=C_1+\frac{C_2}{r^2}+\frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r-E\alpha T. \tag{5.86}$$

5.6.1.1 Discul liber la interior şi exterior

a. Distribuție arbitrară a temperaturii în discul liber

La discul fără sarcini radiale la interior şi exterior, la $r=a$, $\sigma_r=0$, şi la $r=b$, $\sigma_r=0$. Rezultă constantele de integrare

$$C_1=\frac{E\alpha}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r, \qquad C_2=\frac{E\alpha\,a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r,$$

care înlocuite în relațiile (5.85) şi (5.86) conduc la

$$\sigma_r=\frac{E\alpha}{r^2}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r-\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r\right), \tag{5.87}$$

$$\sigma_t=\frac{E\alpha}{r^2}\left(\frac{r^2+a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r+\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r-Tr^2\right). \tag{5.88}$$

Comparând relațiile (5.87) și (5.88) cu (5.21) și (5.22) rezultă că tensiunile în discuri sunt de $(1-\nu)$ ori mai mici decât cele din cilindri lungi.

b. Distribuție logaritmică a temperaturii

Dacă distribuția temperaturii este (5.30), pentru flux termic constant, tensiunile radiale şi cele circumferențiale au expresiile

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha T_0}{2}\left(\frac{\ln\dfrac{b}{r}-\dfrac{\dfrac{b^2}{r^2}-1}{\dfrac{b^2}{a^2}-1}}{\ln\dfrac{b}{a}}\right), \tag{5.89}$$

$$\sigma_t = -\frac{E\alpha T_0}{2}\left(\frac{\ln\dfrac{b}{r}-1+\dfrac{\dfrac{b^2}{r^2}+1}{\dfrac{b^2}{a^2}-1}}{\ln\dfrac{b}{a}}\right). \tag{5.90}$$

Tensiunea radială maximă apare la

$$r = a\,b\sqrt{\frac{2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}}\,.$$

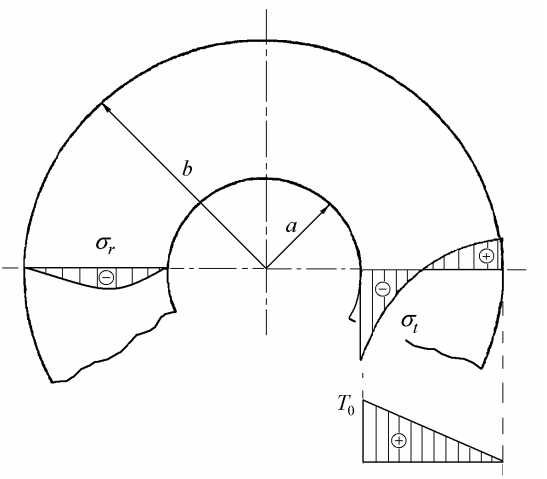


Fig. 5.6

c. Distribuție liniară a temperaturii

Pentru o distribuție liniară a temperaturii de forma (5.69), în care temperatura descreşte cu raza (fig. 5.6)

$$T = T_0 \frac{b-r}{b-a},$$

tensiunile termice se obțin din (5.70) şi (5.71), înmulțind cu $(1-\nu)$

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T_0}{3\left(b^2-a^2\right)}\left[\left(a+b\right)r - \left(a^2+ab+b^2\right) + \frac{a^2b^2}{r^2}\right], \qquad (5.91)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha T_0}{3\left(b^2-a^2\right)}\left[2\left(a+b\right)r - \left(a^2+ab+b^2\right) - \frac{a^2b^2}{r^2}\right]. \qquad (5.92)$$

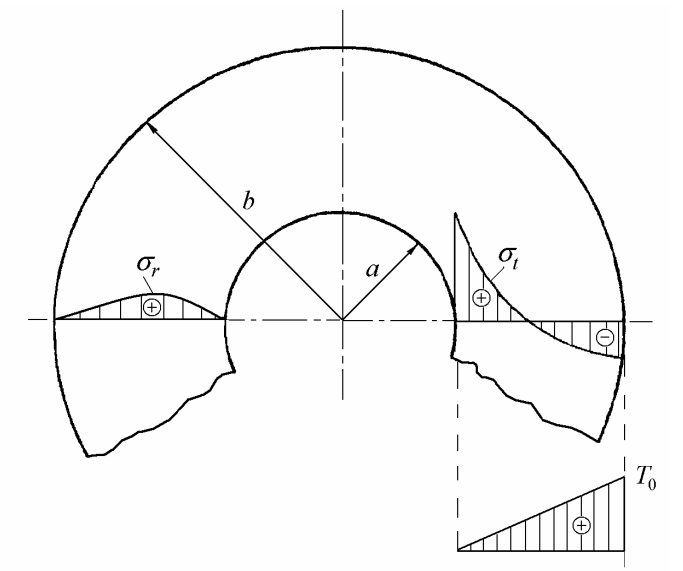


Fig. 5.7

Pentru o distribuție liniară în care temperatura scade de la exterior la interior (fig. 5.7)

$$T = T_0 \frac{r-a}{b-a}, \qquad (5.93)$$

tensiunile termice au expresiile

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha T_0}{3\left(b^2-a^2\right)}\left[\left(a+b\right)r-\left(a^2+ab+b^2\right)+\frac{a^2b^2}{r^2}\right], \qquad (5.94)$$

$$\sigma_t = -\frac{E\alpha T_0}{3\left(b^2-a^2\right)}\left[2\left(a+b\right)r-\left(a^2+ab+b^2\right)-\frac{a^2b^2}{r^2}\right], \qquad (5.95)$$

deci sunt egale şi de sens contrar cu (5.91) şi (5.92).

Aceasta se explică prin faptul că distribuția de temperatură (5.69) cu semn schimbat

$$T = -T_0\frac{b-r}{b-a} = T_0\frac{r-a}{b-a} - T_0, \qquad (5.96)$$

produce aceleaşi tensiuni termice ca (5.93).

Valorile tensiunilor circumferențiale pe contur sunt

$$\sigma_t\big|_{r=a} = E\alpha T_0\frac{a+2b}{3(a+b)}, \qquad (5.97)$$

$$\sigma_t\big|_{r=b} = -E\alpha T_0\frac{2a+b}{3(a+b)}, \qquad (5.98)$$

deci tensiunea maximă apare la interior şi este de întindere.

Comparând expresiile deformațiilor specifice (5.79) şi (5.80), cu (5.9) şi (5.10), se confirmă faptul că relațiile pentru *starea plană de deformații specifice* se pot obține direct din cele pentru *starea plană de tensiuni* (Tabelul 4.1) înlocuind

$$E \to E/\left(1-\nu^2\right), \quad \nu \to \nu/(1-\nu), \quad \alpha \to (1+\nu)\alpha\,. \qquad (5.99)$$

Pentru transformarea inversă se înlocuieşte

$$E \to E\left(1+2\nu\right)/\left(1+\nu\right)^2, \quad \nu \to \nu/\left(1+\nu\right), \quad \alpha \to \left(1+\nu\right)\alpha/\left(1+2\nu\right). \qquad (5.100)$$

5.6.1.2 Discul fixat la exterior şi liber la interior

La discul blocat radial la exterior şi liber la interior, la $r=b$, $\varepsilon_t = 0$ şi la $r=a$, $\sigma_r = 0$. Din (5.58) şi (5.87) rezultă

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{r^2}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r - \int_a^r Tr\,\mathrm{d}r\right) + (\sigma_r)_{r=b}\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right), \qquad (5.101)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha}{r^2}\left(\frac{r^2+a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r + \int_a^r Tr\,\mathrm{d}r - Tr^2\right) + (\sigma_r)_{r=b}\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right), \qquad (5.102)$$

unde

$$(\sigma_r)_{r=b} = -\frac{2E\alpha}{(1-\nu)b^2+(1+\nu)a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r\ , \qquad (5.103)$$

5.6.1.3 Discul fixat la interior şi liber la exterior

La discul blocat radial la interior şi liber la exterior, la $r=a$, $\varepsilon_t = 0$ şi la $r=b$, $\sigma_r = 0$. Din (5.51), (5.87) şi (5.88) rezultă

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{r^2}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r - \int_a^r Tr\,\mathrm{d}r\right) + (\sigma_r)_{r=a}\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right), \qquad (5.104)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha}{r^2}\left(\frac{r^2+a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r + \int_a^r Tr\,\mathrm{d}r - Tr^2\right) + (\sigma_r)_{r=a}\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right), \qquad (5.105)$$

unde

$$(\sigma_r)_{r=a} = \frac{2E\alpha}{(1+\nu)b^2+(1-\nu)a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r\ . \qquad (5.106)$$

Pentru o distribuție a temperaturii de forma

$$T = T_0\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^n, \qquad (5.107)$$

tensiunile termice au expresiile

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T_0}{2}\left[\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{\dfrac{1+\nu}{1-\nu}+\dfrac{a^2}{r^2}}{\dfrac{1+\nu}{1-\nu}+\dfrac{a^2}{b^2}}\frac{T_0^*}{T_0} - \left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{T^*}{T_0}\right], \qquad (5.108)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha T_0}{2}\left[\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{\dfrac{1+\nu}{1-\nu}-\dfrac{a^2}{r^2}}{\dfrac{1+\nu}{1-\nu}+\dfrac{a^2}{b^2}}\frac{T_0^*}{T_0}+\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{T^*}{T_0}-\frac{2T}{T_0}\right], \quad (5.109)$$

unde

$$T^* = \frac{2}{r^2-a^2}\int_a^r Tr\,\mathrm{d}r = \frac{2T_0}{r+a}\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^n \frac{(n+1)r+a}{(n+1)(n+2)}, \quad (5.110)$$

$$T_0^* = \frac{2}{r^2-a^2}\int_a^b Tr\,\mathrm{d}r = \frac{2T_0}{a+b}\,\frac{(n+1)b+a}{(n+1)(n+2)}. \quad (5.111)$$

Tensiunea radială la interior este

$$(\sigma_r)_{r=a} = E\alpha T_0^*\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{1}{1+\nu+\dfrac{a^2}{b^2}(1-\nu)}\ .$$

Tensiunea circumferențială la interior este

$$(\sigma_t)_{r=a} = E\alpha T_0^*\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{\nu}{1+\nu+\dfrac{a^2}{b^2}(1-\nu)}\ ,$$

iar tensiunea circumferențială la exterior este

$$(\sigma_t)_{r=b} = E\alpha T_0^*\left[\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{1}{1+\dfrac{1-\nu}{1+\nu}\dfrac{a^2}{b^2}}-\frac{T_0}{T_0^*}\right].$$

5.6.2 Discul plin

La un disc fără gaură centrală, $C_2 = 0$. La $r = b$, $\sigma_r = 0$, deci din (5.85) rezultă

$$C_1 = \frac{E\alpha}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r\ .$$

Tensiunile termice într-un disc plin, liber pe contur, sunt

$$\sigma_r = E\alpha\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r - \frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,\mathrm{d}r\right), \tag{5.112}$$

$$\sigma_t = E\alpha\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r + \frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,\mathrm{d}r - T\right). \tag{5.113}$$

Deoarece

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\mathrm{d}r = \frac{1}{2}T_0, \tag{5.114}$$

în centrul discului rezultă valori finite (egale) ale tensiunilor radiale şi circumferențiale

$$\sigma_r\big|_{r=0} = \sigma_t\big|_{r=0} = E\alpha\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r - \frac{1}{2}T_0\right), \tag{5.115}$$

unde T_0 este temperatura în centrul discului.

La discul fixat pe contur

$$\sigma_r = E\alpha\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r - \frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,\mathrm{d}r - \frac{2}{b^2(1-\nu)}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r\right), \tag{5.116}$$

$$\sigma_t = E\alpha\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r + \frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,\mathrm{d}r - T - \frac{2}{b^2(1-\nu)}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r\right). \tag{5.117}$$

În centrul discului rezultă valori finite (egale) ale tensiunilor radiale şi circumferențiale

$$\sigma_r\big|_{r=0} = \sigma_t\big|_{r=0} = E\alpha\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r - \frac{2}{b^2(1-\nu)}\int_0^b Tr\,\mathrm{d}r - \frac{1}{2}T_0\right), \tag{5.118}$$

unde T_0 este temperatura în centrul discului.

5.6.2.1 Distribuție dată a temperaturii

Pentru o distribuție (aproximativă) parabolică, de forma

$$T = T_0 \frac{r^2}{b^2}, \qquad T_0 = T_e - T_i, \tag{5.119}$$

din relațiile (5.112) şi (5.113) se obține

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T_0}{4}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right), \tag{5.120}$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha T_0}{4}\left(1 - 3\frac{r^2}{b^2}\right). \tag{5.121}$$

Diagramele temperaturilor şi tensiunilor sunt prezentate în figura 5.8. Tensiunile de valoare maximă apar la marginea exterioară a discului $(T_0 > 0)$.

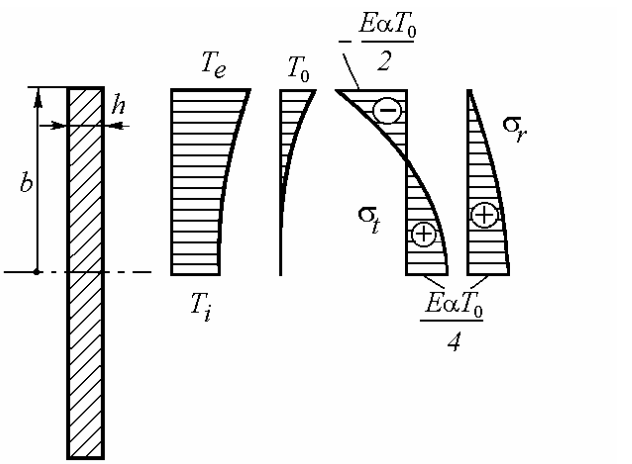


Fig. 5.8

Exemplul 5.2

Să se calculeze tensiunile termice maxime într-un disc circular plin, pentru care

$$T_e = 700^{\circ}C\,,\ T_i = 200^{\circ}C\,,\ E = 210\,\text{GPa}\,,\ \alpha = 12\cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}.$$

Rezolvare

Pentru $T_0 = 500^{\circ}\mathrm{C}$, la exteriorul discului se obține

$$\sigma_{t\max} = -\frac{E\alpha T_0}{2} = 630\ \mathrm{N/mm^2}\ .$$

Calculul este aproximativ, deoarece peste $300^{\circ}\mathrm{C}$ modulul de elasticitate scade cu creşterea temperaturii.

5.6.2.2 Răcire/încălzire bruscă pe contur

Dacă discul este inițial la temperatura T_i şi, din momentul $t = 0$, temperatura pe contur scade (creşte) brusc şi este menținută la T_e, atunci distribuția temperaturii este (Kaceanov, 1968)

$$T = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, J_0\left(\beta_n \frac{r}{b}\right) e^{-p_n t}\ , \tag{5.122}$$

în care $T_0 = T_i - T_e$, β_n sunt rădăcinile ecuației $J_0(\beta) = 0$, coeficienții seriei sunt

$$A_n = \frac{2}{\beta_n\, J_1(\beta_n)}, \tag{5.123}$$

unde J_0 şi J_1 sunt funcții Bessel de speța întâia,

$$p_n = \frac{k\,\beta_n^2}{c_p\, b^2}, \tag{5.124}$$

k este conductivitatea termică şi c_p este căldura specifică a materialului discului.

Înlocuind (5.122) în (5.112) şi (5.113), şi ținând cont că

$$\int_0^r J_0\left(\beta_n \frac{r}{b}\right) r\,\mathrm{d}r = \frac{b\,r}{\beta_n} J_1\left(\beta_n \frac{r}{b}\right), \tag{5.125}$$

se obțin expresiile tensiunilor termice

$$\sigma_r = 2E\alpha T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-p_n t}}{\beta_n^2}\left[1 - \frac{b}{r}\frac{J_1\left(\beta_n \frac{r}{b}\right)}{J_1(\beta_n)}\right], \tag{5.126}$$

$$\sigma_t = 2E\alpha T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-p_n t}}{\beta_n^2} \left[1 + \frac{b}{r} \frac{J_1\left(\beta_n \frac{r}{b}\right)}{J_1(\beta_n)} - \beta_n \frac{J_0\left(\beta_n \frac{r}{b}\right)}{J_1(\beta_n)} \right]. \qquad (5.127)$$

Tensiunea circumferențială maximă apare la $r = b$.

5.6.2.3 Transfer convectiv pe fețele frontale

Într-un disc cu temperatura constantă pe contur, la $r = b$, şi transfer convectiv pe fețele frontale, la $z = \pm h/2$, tensiunile termice sunt (Kaceanov, 1968)

$$\sigma_r = q \left[\frac{I_1(mb)}{mb} - \frac{I_1(mr)}{mr} \right], \qquad (5.128)$$

$$\sigma_t = q \left[\frac{I_1(mb)}{mb} + \frac{I_1(mr)}{mr} - I_0(mr) \right], \qquad (5.129)$$

în care

$$q = \frac{E\alpha Q}{2\lambda\pi h m b I_1(mb)}, \quad m = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}, \qquad (5.130)$$

unde k este conductivitatea termică, λ este coeficientul de transfer termic conductiv, Q este fluxul termic care străbate discul spre marginea $r = b$ în unitatea de timp, iar I_1 este funcția Bessel modificată de speța întâi de argument complex.

Într-o placă de dimensiuni mari (infinită) cu o gaură de rază a, situată departe de margini, cu transfer convectiv pe fețele frontale, în care la $r = a$ temperatura T_0 este menținută constantă, variația temperaturii este

$$T = T_0 \frac{K_0(mr)}{K_0(ma)},$$

unde K_0 este funcția Bessel modificată de speța a doua şi ordinul zero.

Tensiunile termice sunt (Melan şi Parker, 1953)

$$\sigma_r = -E\alpha T_0 \frac{1}{mr} \left[-\frac{K_1(mr)}{K_0(ma)} + \frac{a}{r} \frac{K_1(ma)}{K_0(ma)} \right],$$

$$\sigma_t = -E\alpha T_0 \frac{1}{mr} \left[\frac{mrK_0(mr) + K_1(mr)}{K_0(ma)} - \frac{a}{r} \frac{K_1(ma)}{K_0(ma)} \right],$$

unde K_1 este funcția Bessel modificată de speța a doua şi ordinul întâi iar *m* este dat de (5.130).

5.6.2.4 Sursă de căldură în centrul discului

La un disc cu o sursă de căldură *Q* la interior, la care pe contur se menține o temperatură constantă $T_e = 0$, tensiunile termice sunt (Kaceanov, 1968)

$$\sigma_r = q \ln \frac{b}{r}, \qquad \sigma_t = q\left(\ln \frac{b}{r} - 1 \right), \tag{5.131}$$

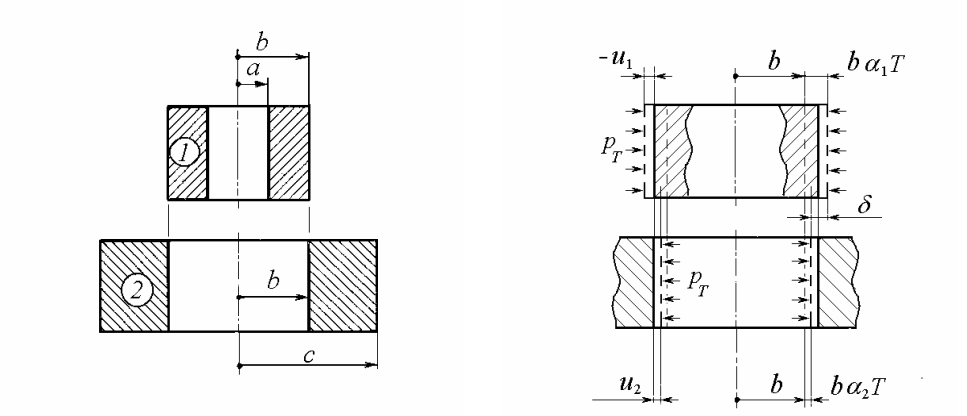
în care s-a notat

$$q = \frac{E \alpha Q}{4 \lambda \pi h}, \tag{5.132}$$

unde *h* este grosimea discului iar λ este coeficientul de transfer termic conductiv.

5.7 Cilindri concentrici din două materiale

Încălzirea uniformă a unui tub compus din doi cilindri din materiale diferite produce tensiuni termice datorită dilatării diferite. Se consideră că cilindrii au lungimi egale, diametrul exterior al tubului interior este inițial egal cu diametrul interior al tubului exterior, deci nu există o presiune inițială pe suprafața de contact, iar coeficientul de dilatare termică liniară al materialului de la interior este mai mare decât al materialului de la exterior, $\alpha_1 > \alpha_2$.



a *b*

Fig. 5.9

După încălzirea cu *T*, diametrul exterior al cilindrului interior creşte mai mult decât diametrul interior al cilindrului exterior, interferența radială δ fiind egală cu diferența dilatărilor termice (fig. 5.9)

$$\delta = b\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)T\,.$$

La suprafața de separație a celor doi cilindri apare o presiune de contact p_T, cilindrul exterior este dilatat iar cilindrul interior este comprimat.

Suma deplasărilor radiale ale suprafețelor celor doi cilindri este egală cu interferența radială

$$-u_1 + u_2 = \delta\,. \tag{5.133}$$

Pentru cilindrul exterior, se fac înlocuirile $p_i \to p_T$, $a \to b$ şi $b \to c$. Din relația (5.57) se obține

$$u_2 = \frac{b\,p_T}{E_2}\left(\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2} + \nu_2\right)\,. \tag{5.134}$$

Pentru cilindrul interior, înlocuind $p_e \to p_T$ în relația (5.61), se obține

$$u_1 = -\frac{b\,p_T}{E_1}\left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \nu_1\right)\,. \tag{5.135}$$

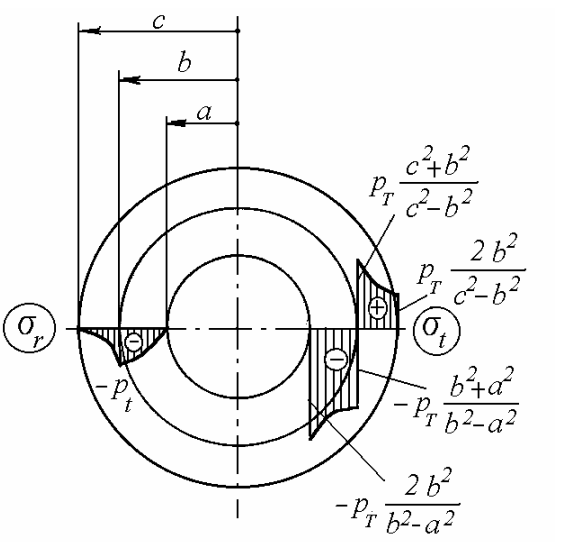


Fig. 5.10

În relațiile (5.134) şi (5.135), s-a utilizat indicele 1 pentru cilindrul interior şi indicele 2 pentru cilindrul exterior.

Înlocuind expresiile (5.134) şi (5.135) în condiția (5.133), se obține formula presiunii de contact

$$p_T = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)T}{K}, \tag{5.136}$$

unde s-a notat

$$K = \frac{1}{E_1}\left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_1\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu_2\right). \tag{5.137}$$

În figura 5.10 se prezintă diagramele de variație ale tensiunilor σ_t şi σ_r în lungul razei tubului din două materiale, datorite încălzirii uniforme. Se observă că tensiunile maxime apar la interiorul cilindrului interior.

Exemplul 5.3

Peste un tub din cupru cu diametrul interior $60\ \text{mm}$ şi diametrul exterior $80\ \text{mm}$ este montat fără joc un tub din oțel cu diametrul interior $80\ \text{mm}$ şi diametrul exterior $100\ \text{mm}$. Se cer tensiunile maxime din fiecare tub produse de o încălzire uniformă cu $T = 80^o C$. Se dau $\nu_1 = 0{,}32$, $E_1 = 100\,\text{GPa}$, $\alpha_1 = 1{,}65 \cdot 10^{-5}\,\text{grd}^{-1}$ şi $\nu_2 = 0{,}28$, $E_2 = 200\,\text{GPa}$, $\alpha_2 = 1{,}25 \cdot 10^{-5}\,\text{grd}^{-1}$ (Umanski, 1973).

Rezolvare. Presiunea de contact (5.126) este $p_T = 5{,}64\ \text{MPa}$.

Tensiunea circumferențială maximă în tubul din cupru este

$$\sigma_{t,1_{\max}} = -\frac{2b^2}{b^2 - a^2}\, p_T = -25{,}8\ \text{MPa}.$$

Tensiunea circumferențială maximă în tubul din oțel este

$$\sigma_{t,2_{\max}} = \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}\, p_T = 25{,}7\ \text{MPa}.$$

Exemplul 5.4

Un inel din oțel cu grosimea $15\ \text{mm}$ este montat fără joc la exteriorul unui disc din duraluminiu cu diametrul $600\ \text{mm}$. Se cer tensiunile produse de încălzirea

uniformă a ansamblului cu $T = 55^{o}C$. Se dau $\nu_1 = 0{,}32$, $E_1 = 70\,\text{GPa}$, $\alpha_1 = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\,\text{grd}^{-1}$ şi $E_2 = 200\,\text{GPa}$, $\alpha_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\text{grd}^{-1}$ (Umanski, 1973).

Rezolvare

Presiunea de contact între inel şi disc este

$$p_T = \frac{\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) T}{\dfrac{1-\nu_1}{E_1} + \dfrac{R}{E_2 h}} = 5\,\text{MPa}\,. \tag{5.138}$$

Tensiunea de întindere în inel este

$$\sigma_{t_2} = \frac{p_T R}{h} = 100\,\text{MPa}\,.$$

Tensiunile în disc sunt

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{t_1} = -p_T = -5\,\text{MPa}\,.$$

Exemplul 5.5

Un cilindru din cupru cu diametrul exterior $100\,\text{mm}$ şi grosimea peretelui $4\,\text{mm}$ este menținut la temperatura de 15^{0}C. Un cilindru din oțel de aceeaşi lungime, cu grosimea peretelui $1\,\text{mm}$, este încălzit la temperatura de 60^{0}C, la care diametrul interior este $100\,\text{mm}$, şi este montat peste cilindrul din cupru. După montaj cilindrul din oțel se răceşte la 15^{0}C. Se cere presiunea de contact şi tensiunile în cei doi cilindri. Se dau $E_1 = 100\,\text{GPa}$, $E_2 = 200\,\text{GPa}$, $\alpha_2 = 1{,}25 \cdot 10^{-5}\,\text{grd}^{-1}$ (Umanski, 1973).

Rezolvare

După răcire între cilindri apare o presiune de contact p_T. Cilindrul din oțel (2) este întins cu forța $p_T D/2$. Cilindrul din cupru (1) este comprimat cu o forță egală şi de sens contrar. Condiția de compatibilitate a deformațiilor se scrie

$$\alpha_2 \left(T_2 - T_1\right) D = \frac{p_T D}{2}\left(\frac{D}{E_2 h_2} + \frac{D}{E_1 h_1}\right). \tag{5.139}$$

Rezultă presiunea de contact

$$p_T = \frac{2\alpha_2 \left(T_2 - T_1 \right)}{D\left(\frac{1}{E_2 h_2} + \frac{1}{E_1 h_1} \right)} = 1{,}5 \text{ MPa} . \qquad (5.140)$$

Tensiunea de întindere în oțel este

$$\sigma_2 = \frac{p_T D}{2h_2} = 72{,}5 \text{ MPa} .$$

Tensiunea de compresiune în cupru este

$$\sigma_1 = -\frac{p_T D}{2h_1} = -18{,}1 \text{ MPa} .$$

6.
DISCURI ŞI CILINDRI ÎN ROTAȚIE

În acest capitol se studiază discuri şi cilindri în rotație cu turație constantă, încărcate şi/sau încălzite axial simetric într-un câmp termic staționar. Tensiunile normale şi deformațiile radiale într-un punct depind de o singură variabilă - raza în punctul respectiv.

Elementele în rotație sunt solicitate de forțe volumice centrifugale. Discurile turbinelor au grosime variabilă cu raza, putând fi solicitate la exterior de o sarcină centrifugală datorită paletelor, iar la interior de presiunea de fretaj pe arbore. La turbinele cu gaze se întâlnesc şi discuri fără gaură.

Rotoarele moderne ale turbinelor cu abur sunt formate din discuri sudate între ele la periferie. Corpurile de înaltă presiune şi presiune intermediară au rotoare monobloc de tip tambur, cu sau fără gaură centrală.

Primele studii asupra tensiunilor în discuri subțiri în rotație au fost publicate de A. Stodola (1903) şi M. Grübler (1906).

6.1 Ecuațiile fundamentale ale discurilor în rotație

Ca şi în cazul discurilor în repaus, pentru rezolvarea problemei static nedeterminate este necesară utilizarea a patru tipuri de relații: ecuații de echilibru, condiții de compatibilitate, ecuații constitutive şi condiții la limită.

6.1.1 Ecuația de echilibru

Se consideră un element de grosime variabilă, tăiat dintr-un disc axial-simetric prin două plane axiale şi două suprafețe cilindrice concentrice infinit vecine (fig. 6.1, *a*). Datorită simetriei, pe fețele acestui element nu acționează tensiuni tangențiale (de forfecare).

Fie σ_t tensiunea normală circumferențială şi σ_r tensiunea normală radială. Aceasta din urmă variază cu raza r şi pe suprafața exterioară este $\sigma_r + \mathrm{d}\sigma_r$.

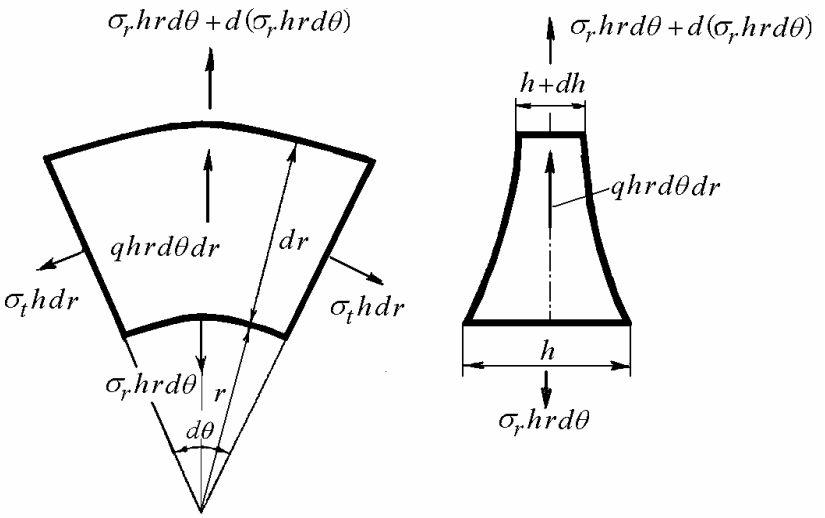


Fig. 6.1

În afara forțelor care rezultă din tensiuni, asupra elementului mai acționează, pe direcția razei, o forță centrifugă

$$\mathrm{d}F = qhr\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,,$$

unde sarcina volumică $q = \rho\omega^2 r$, ρ este densitatea materialului discului, iar ω este viteza unghiulară (constantă) de rotație (rad/s).

Ecuația de proiecții a forțelor pe bisectoarea unghiului $\mathrm{d}\theta$ se scrie, aproximând $\sin(\mathrm{d}\theta/2) \approx \mathrm{d}\theta/2$,

$$\sigma_r\, hr\,\mathrm{d}\theta + 2\sigma_t\, h\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}\theta}{2} - \left(\sigma_r + \frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\right)(r+\mathrm{d}r)h\,\mathrm{d}\theta - \mathrm{d}F = 0\,,$$

care se aduce la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\sigma_r h) - (\sigma_t - \sigma_r)\frac{h}{r} + \rho\omega^2 r\,h = 0 \qquad (6.1)$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rh\sigma_r) - h\sigma_t + \rho\omega^2 hr^2 = 0\,. \qquad (6.1,\ a)$$

6.1.2 Relații între deformații specifice şi deplasări

Relațiile între deformații specifice şi deplasări sunt (5.2) şi (5.3). Alungirea specifică radială este

$$\varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}, \tag{6.2}$$

iar alungirea specifică circumferențială este

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}, \tag{6.3}$$

unde *u* este deplasarea radială a unui punct situat la raza *r*.

Ecuația de compatibilitate (5.4) este

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\varepsilon_t \cdot r\right) = \varepsilon_r . \tag{6.4}$$

6.1.3 Relații între tensiuni şi deformații specifice

Legea lui Hooke cu efecte termice pentru *starea plană de tensiuni* se scrie

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\ \sigma_t\right) + \alpha T , \tag{6.5}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\ \sigma_r\right) + \alpha T , \tag{6.6}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară al materialului.

În general E, ν şi α variază cu temperatura. În lucrarea de față, această variație este luată în considerație doar la discuri cu grosimea variabilă.

6.1.4 Condiții la limită

Condițiile la limită dau valorile tensiunilor radiale σ_r la $r = a$ şi $r = b$. Discurile turbinelor sunt solicitate la exterior de o sarcină centrifugală datorită paletelor sau bandajului, iar la interior de presiunea de fretaj pe arbore.

Discurile pline sunt solicitate radial doar la exterior. În centru, tensiunile radiale sunt egale cu cele circumferențiale.

Dacă interesează doar tensiunile termice, atunci constantele de integrare se determină din condițiile ca tensiunile radiale să fie nule la interior şi la exterior.

6.2 Discuri cu grosimea constantă

În continuare se consideră discul cu grosime constantă, $h = const.$, în câmp termic staționar, solicitat de forțe masice centrifuge, în care se neglijează eventuale solicitări la răsucire sau la încovoiere.

6.2.1 Soluția generală

6.2.1.1 Rezolvarea în funcție de tensiuni

Înlocuind deformațiile specifice în ecuația de compatibilitate şi ținând cont de (6.1) în care se simplifică *h*, se obține a doua relație între tensiuni

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sigma_t \cdot r\right) - \sigma_r = -\nu\,\rho\,\omega^2 r^2 - E\alpha r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{6.7}$$

Eliminând σ_t între relațiile (6.1) şi (6.7), se obține ecuația diferențială

$$r\,\frac{\mathrm{d}^2\sigma_r}{\mathrm{d}r^2} + 3\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} = -\left(3+\nu\right)\rho\,\omega^2 r - E\alpha\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}, \tag{6.8}$$

care se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sigma_r r^2\right)\right] = -\left(3+\nu\right)\rho\,\omega^2 r - E\alpha\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{6.9}$$

Considerând E, ν şi α constante, soluția ecuației (6.9) are forma

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - k_1 r^2 - \frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r T r\,\mathrm{d}r, \tag{6.10}$$

Înlocuind expresia (6.10) în (6.1) rezultă

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - k_2 r^2 - E\alpha T + \frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r T r\,\mathrm{d}r. \tag{6.11}$$

În relațiile (6.10) şi (6.11) s-a notat

$$k_1 = \frac{3+\nu}{8}\rho\,\omega^2, \qquad k_2 = \frac{1+3\nu}{8}\rho\,\omega^2. \tag{6.12}$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită.

În cazul general, pentru discul cu gaură centrală, tensiunile radiale la interior şi exterior se notează

$$\sigma_{ra} = \sigma_r\big|_{r=a}, \quad \sigma_{rb} = \sigma_r\big|_{r=b}. \tag{6.13}$$

Înlocuind condițiile (6.13) în (6.10) se obține

$$\sigma_{ra} = C_1 - \frac{C_2}{a^2} - k_1 a^2, \tag{6.14}$$

$$\sigma_{rb} = C_1 - \frac{C_2}{b^2} - k_1 b^2 - \frac{E\alpha}{b^2}\int_a^b Tr\mathrm{d}r, \tag{6.15}$$

de unde rezultă

$$C_1 = -\frac{a^2}{b^2-a^2}\sigma_{ra} + \frac{b^2}{b^2-a^2}\sigma_{rb} + k_1\left(a^2+b^2\right) + \frac{E\alpha}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\mathrm{d}r, \tag{6.16}$$

$$C_2 = -\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\sigma_{ra} + \frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\sigma_{rb} + k_1 a^2b^2 + \frac{E\alpha a^2}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\mathrm{d}r. \tag{6.17}$$

Înlocuind (6.16) şi (6.17) în (6.10) şi (6.11) se obține

$$\begin{aligned}\sigma_r = &-\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\sigma_{ra} + \frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sigma_{rb} + \\ &+\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{r^2}-r^2\right) + \\ &+\frac{E\alpha}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\int_a^b Tr\mathrm{d}r - \frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}\sigma_t = &-\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\sigma_{ra} + \frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sigma_{rb} + \\ &+\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{r^2}-\frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) + \\ &+\frac{E\alpha}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\int_a^b Tr\mathrm{d}r + \frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\mathrm{d}r - E\alpha T.\end{aligned} \tag{6.19}$$

În expresiile de mai sus, primii doi termeni corespund încărcării cu presiuni radiale la interior şi exterior, al treilea termen este produs de câmpul centrifugal, iar ceilalți termeni sunt produşi de câmpul termic staționar.

Diagramele tensiunilor σ_r şi σ_t care apar într-un disc cu gaură centrală sunt ilustrate în figura 6.2.

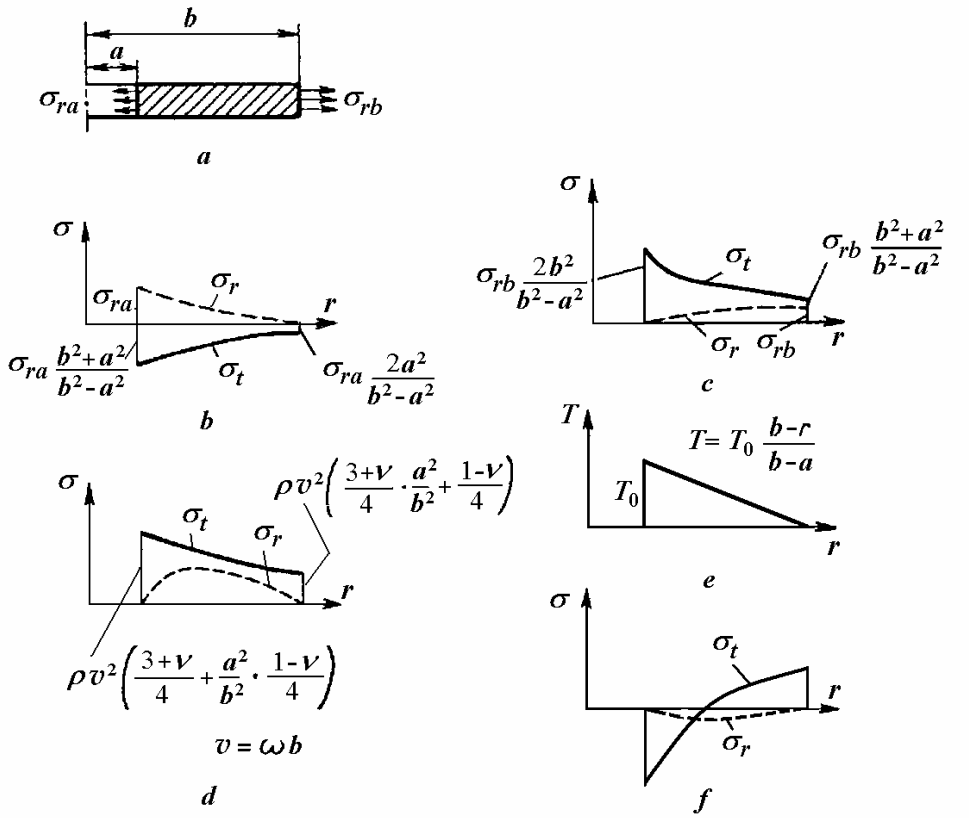


Fig. 6.2

Diagramele din figura 6.2, *b* corespund primului termen din membrul drept al expresiilor (6.18) şi (6.19), cele din figura 6.2, *c* corespund termenului al doilea, cele din figura 6.2, *d* corespund termenului al treilea, iar cele din figura 6.2, *f* corespund celorlalți termeni, pentru o distribuție liniară a temperaturii în lungul razei, ca în figura 6.2, *e*.

În figura 6.3 sunt prezentate diagramele tensiunilor σ_r şi σ_t într-un disc plin, solicitat de sarcina radială periferică σ_{rb}, după cum urmează: tensiunile produse de σ_{rb} (fig. 6.3, *b*), tensiunile centrifugale (fig. 6.3, *c*) şi tensiunile termice (fig. 6.3, *e*) produse de încălzirea neuniformă cu variația de temperatură din figura 6.3, *d*.

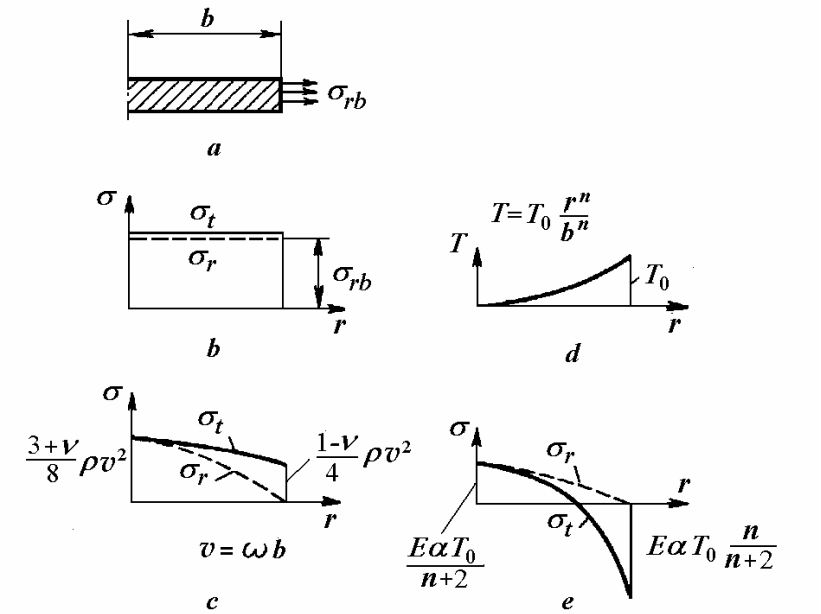


Fig. 6.3

6.2.1.2 Rezolvarea în funcție de deplasări

Ecuațiile (6.5) şi (6.6) se mai scriu

$$\sigma_r - \nu\ \sigma_t = E\varepsilon_r - E\alpha T\ , \tag{6.20}$$

$$\sigma_t - \nu\ \sigma_r = E\varepsilon_t - E\alpha T\ . \tag{6.21}$$

Rezolvând sistemul ca în (4.36) şi înlocuind deformațiile specifice în funcție de deplasarea radială, rezultă

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{u}{r} - (1+\nu)\,\alpha T\right], \tag{6.22}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r} + \nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - (1+\nu)\,\alpha T\right]. \tag{6.23}$$

Înlocuind tensiunile (6.22) si (6.23) în ecuația de echilibru (6.1) în care se simplifică *h*, se obține ecuația în deplasări

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\nu^2}{E}q + (1+\nu)\,\alpha\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{6.24}$$

Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-\frac{u}{r^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ur)\right], \tag{6.25}$$

ecuația (6.24) se scrie sub forma uşor integrabilă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ur)\right]=-\frac{1-\nu^2}{E}q+(1+\nu)\,\alpha\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{6.26}$$

După prima integrare se obține

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ur)=2C_1^*r-\frac{1-\nu^2}{E}r\int_a^r q\,\mathrm{d}r+(1+\nu)\,\alpha\,T\,r. \tag{6.27}$$

Integrând încă odată rezultă, efectuând integrarea prin părți,

$$u=C_1^*\,r+\frac{C_r^*}{r}-\frac{1-\nu^2}{2E}\left[\,r\int_a^r q\,\mathrm{d}r-\frac{1}{r}\int_a^r q\,r^2\mathrm{d}r\right]+(1+\nu)\,\frac{\alpha}{r}\int_a^r T\,r\,\mathrm{d}r, \tag{6.28}$$

unde

$$\int_a^r q\,r^2\mathrm{d}r=\frac{\rho\omega^2}{2}\left(r^2-a^2\right),\qquad \int_a^r q\,r^2\mathrm{d}r=\frac{\rho\omega^2}{4}\left(r^4-a^4\right). \tag{6.29}$$

Derivând (6.28) se obține

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=C_1^*-\frac{C_r^*}{r^2}-\frac{1-\nu^2}{2E}\left[\int_a^r q\,\mathrm{d}r+\frac{1}{r^2}\int_a^r q\,r^2\mathrm{d}r\right]-(1+\nu)\,\frac{\alpha}{r^2}\int_a^r T\,r\,\mathrm{d}r+(1+\nu)\alpha T. \tag{6.30}$$

Introducând expresiile (6.28) şi (6.30) în relațiile (6.22) şi (6.23) rezultă

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu}C_1^*-\frac{E}{1+\nu}\frac{C_r^*}{r^2}-\frac{1}{2}\left[(1+\nu)\int_a^r q\,\mathrm{d}r+(1-\nu)\frac{1}{r^2}\int_a^r q\,r^2\mathrm{d}r\right]-\frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r T\,r\,\mathrm{d}r, \tag{6.31}$$

$$\sigma_t=\frac{E}{1-\nu}C_1^*+\frac{E}{1+\nu}\frac{C_r^*}{r^2}-\frac{1}{2}\left[(1+\nu)\int_a^r q\,\mathrm{d}r-(1-\nu)\frac{1}{r^2}\int_a^r q\,r^2\mathrm{d}r\right]+\frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r T\,r\,\mathrm{d}r-E\alpha T. \tag{6.32}$$

Înlocuind expresiile integralelor (6.29) se obține

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu} C_1^* - \frac{E}{1+\nu} \frac{C_r^*}{r^2} + \frac{\rho\omega^2}{r^2} \left[\frac{1+\nu}{4} \frac{a^2}{r^2} + \frac{1-\nu}{8} \frac{a^4}{r^4} - \frac{3+\nu}{8} \right] - \frac{E\alpha}{r^2} \int_a^r T r \, \mathrm{d}r \,, \tag{6.33}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu} C_1^* + \frac{E}{1+\nu} \frac{C_r^*}{r^2} + \frac{\rho\omega^2}{r^2} \left[\frac{1+\nu}{4} \frac{a^2}{r^2} - \frac{1-\nu}{8} \frac{a^4}{r^4} - \frac{1+3\nu}{8} \right] + \frac{E\alpha}{r^2} \int_a^r T r \, \mathrm{d}r - E\alpha T \,, \tag{6.34}$$

sau

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{\rho\omega^2}{r^2} L - \frac{E\alpha}{r^2} \int_a^r T r \, \mathrm{d}r \,, \tag{6.35}$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{\rho\omega^2}{r^2} M + \frac{E\alpha}{r^2} \int_a^r T r \, \mathrm{d}r - E\alpha T \,, \tag{6.36}$$

unde s-a notat

$$A = \frac{E}{1-\nu} C_1^* \,, \qquad B = \frac{E}{1+\nu} C_r^* \,,$$

$$L = -\left(\frac{1+\nu}{4} \frac{a^2}{r^2} + \frac{1-\nu}{8} \frac{a^4}{r^4} - \frac{3+\nu}{8} \right), \tag{6.37}$$

$$M = -\left(\frac{1+\nu}{4} \frac{a^2}{r^2} - \frac{1-\nu}{8} \frac{a^4}{r^4} - \frac{1+3\nu}{8} \right).$$

Constantele A şi B se determină din condițiile la limită la interiorul şi exteriorul discului.

6.2.2 Discuri fără efecte termice

În cazul general, expresiile tensiunilor radiale şi circumferențiale în discuri cu gaură concentrică (6.18) şi (6.19) conțin doi termeni care corespund încărcării cu presiuni radiale la interior şi exterior, un termen produs de câmpul centrifugal si un termen produs de câmpul termic staționar. Diagramele tensiunilor produse de presiuni radiale sunt date în figurile 5.4 şi 5.5, diagramele tensiunilor produse de un câmp termic staționar sunt prezentate în figura 5.3, deci interesează diagramele tensiunilor produse doar de rotirea discului. Tensiunile totale se determină prin suprapunerea efectelor, însumând cele patru diagrame.

6.2.2.1 Discuri cu gaură concentrică

La discul fără sarcini radiale la interior şi exterior (fig. 6.4, *a*), la $r = a$, $\sigma_r = 0$, şi la $r = b$, $\sigma_r = 0$.

Rezultă constantele de integrare

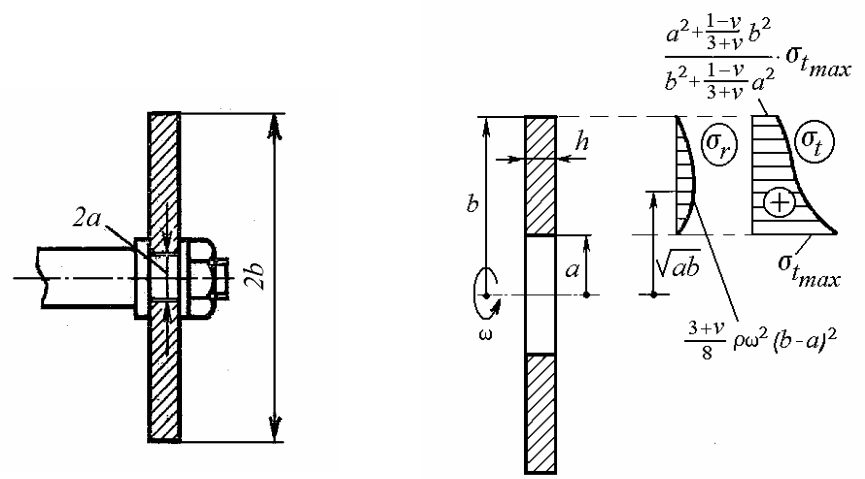
$$C_1 = k_1\left(a^2 + b^2\right), \qquad C_2 = k_1 a^2 b^2, \tag{6.38}$$

care înlocuite în relațiile (6.10) şi (6.11) conduc la

$$\sigma_r = k_1\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2\right), \tag{6.39}$$

$$\sigma_t = k_1\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2\right). \tag{6.40}$$

Diagramele de variație ale tensiunilor în lungul razei sunt prezentate în figura 6.4, *b*.



a *b*

Fig. 6.4

Tensiunile de valoare maximă apar pe suprafața interioară şi au valoarea

$$\sigma_{t\,max} = 2k_1\left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} a^2\right). \tag{6.41}$$

Armarea discurilor de polizor se face prin inserții sau inele de sârmă înglobate în materialul abraziv în vecinătatea găurii discului, unde tensiunile locale de întindere au valori maxime.

Viteza unghiulară maximă care produce atingerea limitei de curgere σ_c pe suprafața interioară a discului, conform criteriilor Tresca şi von Mises, este

$$\omega_c = \sqrt{\frac{4\sigma_c}{\rho\left[\left(3+\nu\right)b^2+\left(1-\nu\right)a^2\right]}}\ . \tag{6.42}$$

Când $a \to 0$,

$$\sigma_{t\,max} = 2k_1 b^2, \tag{6.43}$$

valoare ce corespunde unui disc cu o gaură centrală foarte mică.

6.2.2.2 Discuri pline

La discurile fără gaură, la $r = b$, $\sigma_r = 0$, iar în centru, pentru $r = 0$, $\sigma_r = \sigma_t$.

Rezultă constantele de integrare

$$C_1 = k_1 b^2, \qquad C_2 = 0, \tag{6.44}$$

care înlocuite în (6.10) şi (6.11) conduc la formulele tensiunilor

$$\sigma_r = k_1\left(b^2 - r^2\right), \tag{6.45}$$

$$\sigma_t = k_1\left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right). \tag{6.46}$$

Diagramele de variație ale tensiunilor în lungul razei sunt prezentate în figura 6.5.

Tensiunile maxime apar în centrul discului şi sunt

$$\sigma_{t\,max} = \sigma_{r_{max}} = k_1 b^2 = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2\,. \tag{6.47}$$

Se observă că pentru valori ρ şi ν date, tensiunile depind numai de viteza periferică a discului $v = \omega b$.

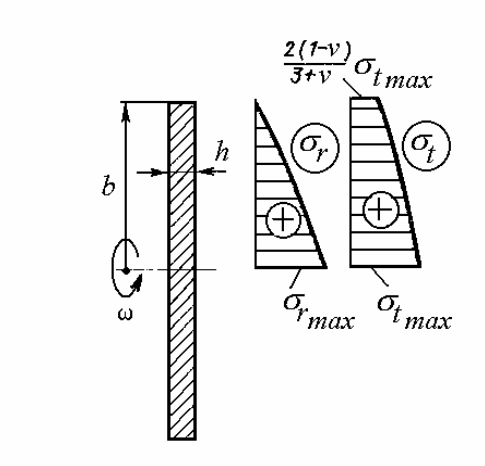


Fig. 6.5

Viteza unghiulară maximă care produce atingerea limitei de curgere σ_c în centrul discului este

$$\omega_c = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{8\sigma_c}{(3+\nu)\rho}}. \qquad (6.48)$$

Comparând expresiile (6.43) şi (6.47), rezultă că la discul cu gaură mică tensiunile în jurul găurii sunt de două ori mai mari decât în centrul discului fără gaură, deci gaura acționează ca un concentrator de tensiuni. Factorul teoretic de concentrare a tensiunilor elastice este în acest caz $K_t = 2$.

Exemplul 6.1

Să se determine tensiunile maxime într-un disc cu $a = 150\,\text{mm}$, $b = 300\,\text{mm}$, $\nu = 0{,}3$ şi $\rho = 7850\,\text{kg}/\text{m}^3$, care se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\omega = 314\,\text{rad}/\text{s}$.

Rezolvare

Tensiunile radiale maxime (fig. 6.2, *b*) apar la $r = 212{,}13\,\text{mm}$ şi sunt

$$\sigma_{r\max} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b-a)^2 = 7{,}18\,\text{N}/\text{mm}^2.$$

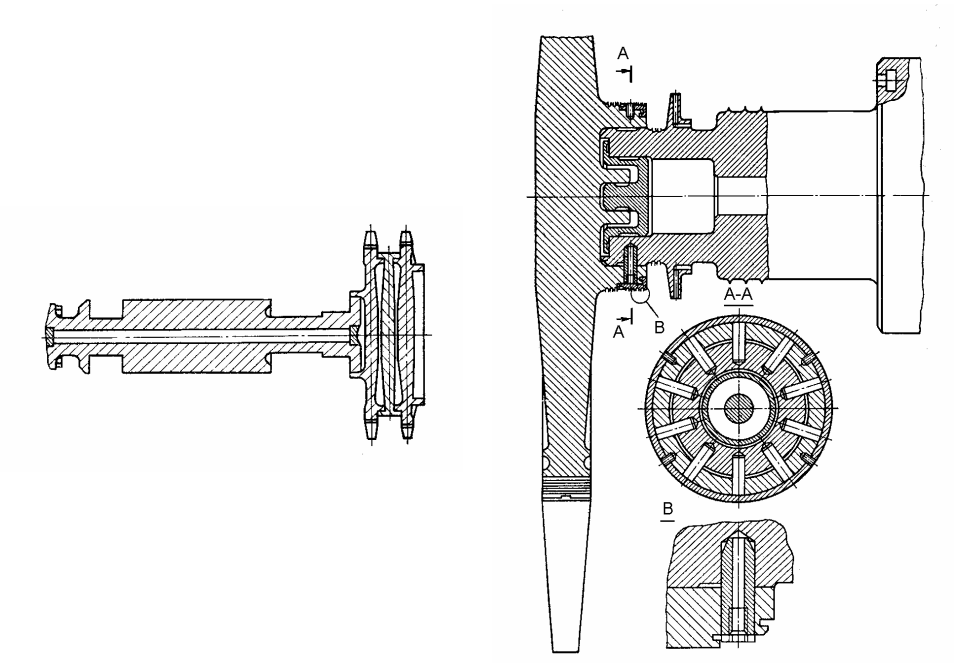
Tensiunile circumferențiale maxime apar la interior şi au valoarea

$$\sigma_{t\,max} = \frac{3+\nu}{4}\rho\omega^2\left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu}a^2\right) = 60{,}5\,\text{N}/\text{mm}^2.$$

6.3 Discuri cu grosimea variabilă

Discurile turbinelor au grosimea variabilă deoarece solicitarea prin sarcini centrifugale scade cu creşterea razei.

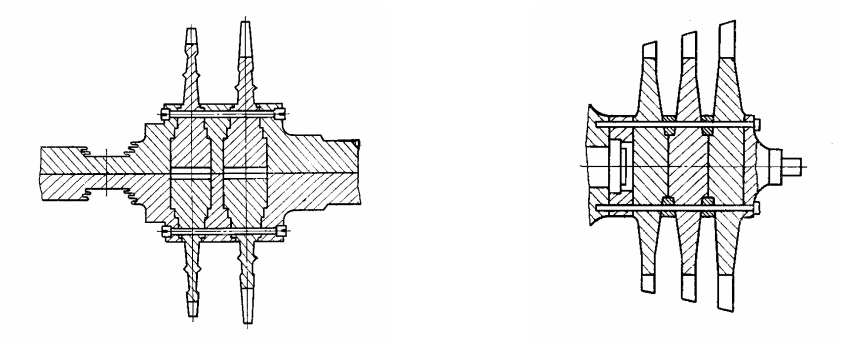
Rotoarele turbinelor cu gaze au discuri fără gaură, în consolă (fig. 6.6).



a *b*

Fig. 6.6

Soluțiile moderne utilizează discuri asamblate cu şuruburi de strângere axială, ca în figura 6.7 (Kostiuk şi Frolov, 1985).



a *b*

Fig. 6.7

Rotoarele turbinelor cu abur au discuri separate, montate pe arbore prin fretaj (fig. 6.8, *a*), doar la unitățile de joasă presiune, cu turația de 1500 (sau 1800) rot/min. Celelalte sunt fie sudate (fig. 6.8, *b*), fie monobloc, cu sau fără gaură centrală (Berg ş. a., 1981).

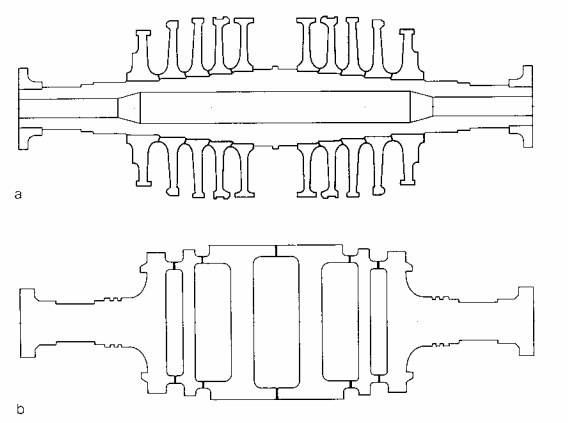


Fig. 6.8

Un rotor combinat, cu o parte monobloc cu discuri integrate şi o parte cu discuri individuale montate prin fretaj pe arbore, este prezentat în figura 6.9.

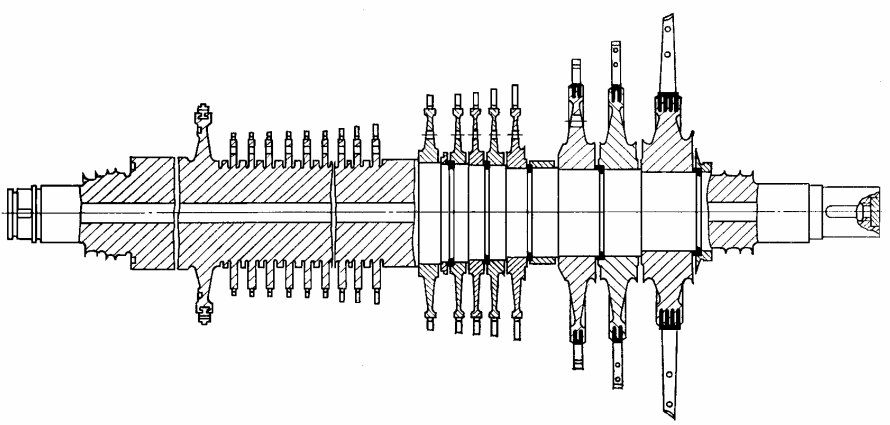


Fig. 6.9

Calculul tensiunilor în discuri cu anumite profile depăşeşte cadrul acestui curs. În continuare se analizează cazul general al unui disc cu profil oarecare, simetric față de un plan central perpendicular pe axa de rotație.

Se consideră un disc cu grosimea variabilă (fig. 6.10, *a*) de tipul celor utilizate la turbine cu abur sau cu gaze (fără palete laterale), având palete dispuse la exteriorul obezii şi butucul montat pe arbore prin fretaj. Acțiunea paletelor se modelează printr-o sarcină radială centrifugală uniform distribuită pe suprafața

obezii, în timp ce montarea cu strângere produce o sarcină radială uniform distribuită pe suprafața de contact cu arborele.

Se admite că discul este supus la o stare plană de tensiuni, repartiția tensiunilor pe grosimea discului fiind uniformă. Aceste ipoteze sunt valabile pentru discuri la care raportul între diametru şi grosimea maximă este mai mare decât patru (Stodola, 1907).

Calculul discurilor în rotație se bazează pe ecuația de echilibru (6.1, *a*)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rh\sigma_r\right)-h\sigma_t+\rho\omega^2 hr^2=0$$

şi pe ecuația de compatibilitate (6.4) exprimată în funcție de tensiuni

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\sigma_t}{E}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\nu\sigma_r}{E}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\alpha T\right)-\frac{\left(1+\nu\right)\left(\sigma_r-\sigma_t\right)}{Er}=0\,. \qquad (6.49)$$

Rezolvarea exactă a celor două ecuații se dovedeşte dificilă în cazul general, atunci când profilul discului şi temperatura variază după o lege oarecare, şi când modulul de elasticitate *E*, coeficientul lui Poisson ν şi coeficientul de dilatare termică liniară α sunt funcții de temperatură.

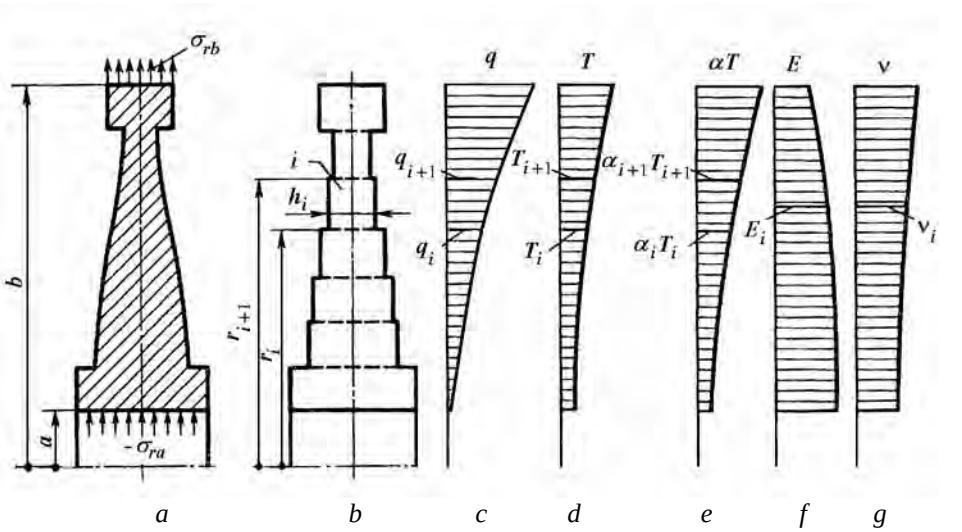


Fig. 6.10

O metodă convenabilă de rezolvare a problemei se bazează pe aproximarea discului real (fig. 6.10, *a*) prin segmente de grosime constantă, rezultând un profil în trepte (fig. 6.10, *b*). Se calculează variația în lungul razei a sarcinii radiale inerțiale *q*, pe unitatea de volum (fig. 6.10, *c*). Se consideră cunoscute variația temperaturii *T* în funcție de raza discului (fig. 6.10, *d*) şi variația coeficientului de

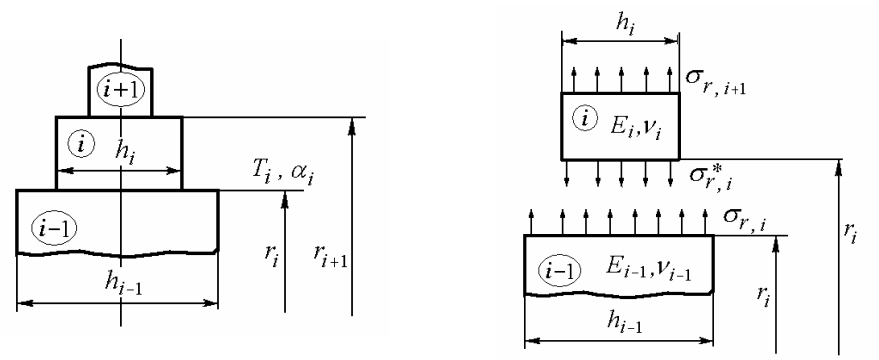
dilatare liniară α în funcție de temperatură, pe baza căreia se trasează curba variației produsului αT în funcție de rază (fig. 6.10, *e*). Cunoscând legile de variație ale modulului de elasticitate E şi ale coeficientului de contracție transversală ν în funcție de temperatură, se trasează diagramele de variație ale acestor mărimi în lungul razei discului, care se aproximează apoi prin variații în trepte, cu valori constante pe lățimea fiecărui segment (fig. 6.10, *f* şi *g*).

Determinarea variației temperaturii în lungul razei discului este o problemă complicată de transfer de căldură conductiv şi convectiv care depăşeşte cadrul acestui curs introductiv. În continuare distribuția temperaturii se consideră dată.

6.3.1 Metoda celor două calcule

Se înlocuieşte profilul discului cu un profil în trepte, constând din segmente de grosime constantă. De obicei grosimile segmentelor se aleg egale cu grosimile profilului real la razele medii ale segmentelor respective. Numerotarea se face de la interior spre exterior.

Segmentul *i*, cuprins între raza r_i şi raza r_{i+1}, are grosimea h_i (fig. 6.11, *a*), iar modulul de elasticitate E_i şi coeficientul de contracție transversală ν_i au valori corespunzătoare razei medii a segmentului.



a *b*

Fig. 6.11

Tensiunile $\sigma_{r,i+1}$ şi $\sigma_{t,i+1}$ la exteriorul segmentului *i* se pot exprima în funcție de tensiunile $\sigma^*_{r,i}$ şi $\sigma^*_{t,i}$ la interiorul segmentului prin relațiile

$$\sigma_{r,i+1} = \sigma^*_{r,i}\, N_i + \sigma_{t,i}\left(1-N_i\right) + E_i\left[\left(1-N_i\right)\alpha_i T_i - \Phi_i\right] - \rho\omega^2 r_{i+1}^2 L_i\,, \tag{6.50}$$

$$\sigma_{t,i+1} = \sigma^*_{r,i}\left(1-N_i\right) + \sigma^*_{t,i}\, N_i + E_i\left(N_i\alpha_i T_i + \Phi_{i+1} - \alpha_{i+1}T_{i+1}\right) - \rho\omega^2 r_{i+1}^2 M_i\,, \tag{6.51}$$

unde

$$N_i = \frac{1}{2}\left(1+\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2}\right), \tag{6.52}$$

$$L_i = -\left(\frac{1+\nu_i}{4}\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2}+\frac{1-\nu_i}{8}\frac{r_i^4}{r_{i+1}^4}-\frac{3+\nu_i}{8}\right), \tag{6.53}$$

$$M_i = -\left(\frac{1+\nu_i}{4}\frac{r_i^2}{r_{i+1}^2}-\frac{1-\nu_i}{8}\frac{r_i^4}{r_{i+1}^4}-\frac{1+3\nu_i}{8}\right). \tag{6.54}$$

Înlocuind integrala prin aria trapezului de sub funcția liniarizată

$$\Phi_{i+1} = \frac{1}{r_{i+1}^2}\int_{r_i}^{r_{i+1}} \alpha T r \,\mathrm{d}r \approx \frac{1}{2r_{i+1}^2}\left(\alpha_{i+1}T_{i+1}r_{i+1}-\alpha_i T_i r_i\right)\left(r_{i+1}-r_i\right). \tag{6.55}$$

La raza r_i se produce un salt de grosime (fig. 6.11, *b*). Tensiunile $\sigma_{r,i}$ și $\sigma_{t,i}$ la exteriorul segmentului $(i-1)$ se exprimă în funcție de tensiunile $\sigma_{r,i}^*$ și $\sigma_{t,i}^*$ la interiorul segmentului următor *i*. Echilibrul axial la nivelul razei r_i se scrie

$$\sigma_{r,i}^* h_i = \sigma_{r,i}\, h_{i-1}.$$

Egalitatea deplasărilor radiale şi deci egalitatea deformațiilor specifice circumferențiale la granița celor două segmente se scrie

$$\frac{1}{E_i}\left(\sigma_{t,i}^* - \nu_i\,\sigma_{r,i}^*\right) = \frac{1}{E_{i-1}}\left(\sigma_{t,i} - \nu_{i-1}\,\sigma_{r,i}\right),$$

unde deformațiile termice $\alpha_i T_i$ s-au redus fiind egale.

Rezultă următoarele două relații între tensiunile din secțiunea cu salt de grosime

$$\sigma_{r,i}^* = \frac{h_{i-1}}{h_i}\sigma_{r,i}, \tag{6.56}$$

$$\sigma_{t,i}^* = \nu_i\,\sigma_{r,i}^* + \frac{E_i}{E_{i-1}}\left(\sigma_{t,i} - \nu_{i-1}\,\sigma_{r,i}\right). \tag{6.57}$$

Pentru introducerea condițiilor la limită se poate utiliza *metoda celor două calcule.*

În primul calcul, se cunoaşte $\sigma_{r,0} = \sigma_{ra}$ şi se dă o valoare arbitrară lui $\sigma_{t,0} = \sigma_{ta}$. Cu ajutorul formulelor (6.50), (6.51), (6.56) şi (6.57) se calculează pe rând tensiunile la exteriorul fiecărui segment până la exteriorul discului. Rezultă o valoare a tensiunii radiale la exterior $\sigma_{rb}^{(1)}$, diferită de valoarea exactă cunoscută σ_{rb}.

În al doilea calcul, se neglijează sarcina centrifugală şi efectul câmpului termic şi se consideră tensiunea radială la interior nulă. Tensiunea radială astfel calculată la exterior $\sigma_{rb}^{(2)}$ se înmulţeşte cu un coeficient *k* determinat din condiţia

$$\sigma_{rb}^{(1)} + k\,\sigma_{rb}^{(2)} = \sigma_{rb}\,. \tag{6.58}$$

Tensiunile totale în fiecare segment de disc sunt egale cu suma tensiunilor determinate în primul calcul şi a tensiunlor determinate în al doilea calcul înmulţite cu *k*.

În final, valorile tensiunilor la joncţiunea dintre segmente se calculează ca media aritmetică a valorilor determinate în cele două segmente adiacente

$$\sigma_r\left(r_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{r,i} + \sigma_{r,i}^{*}\right), \tag{6.59}$$

$$\sigma_t\left(r_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{t,i} + \sigma_{t,i}^{*}\right). \tag{6.60}$$

În cazul discurilor pline, condiţiile la centru sunt $\sigma_{r0} = \sigma_{t0}$, şi se înlocuieşte $a = 0$ în relaţiile stabilite pentru discurile cu gaură concentrică.

Pentru uşurarea calculelor, în proiectare s-au folosit *diagrame Donath*, în care s-a reprezentat variaţia sumei şi diferenţei tensiunilor σ_r şi σ_t în funcţie de turaţia maşinii.

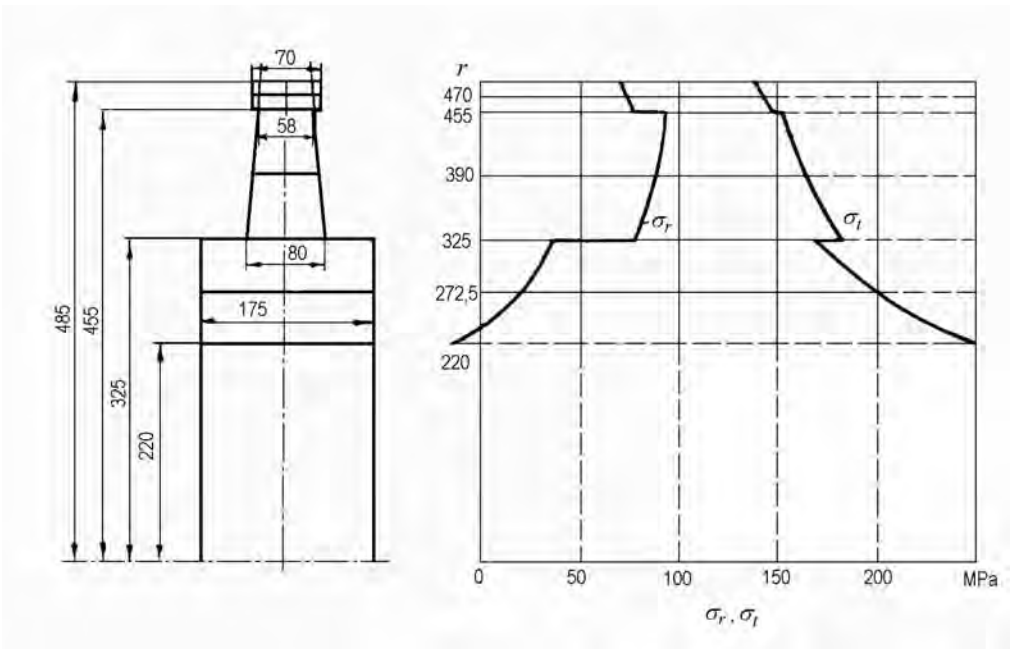
La un disc fretat pe arbore, dacă deplasarea radială la interior este impusă din condiţia de fretaj, este convenabil să se efectueze calculele de la exterior la interior, cu numerotarea corespunzătoare. În primul calcul se utilizează valoarea corectă a tensiunii radiale σ_{rb} din încărcarea paletelor şi se alege o tensiune circumferenţială arbitrară la exteriorul obezii. În al doilea calcul, pentru discul în repaus şi fără efecte termice, se începe calculul cu o sarcină radială nulă în obadă şi o tensiune circumferenţială arbitrară în obadă. În fiecare caz se calculează variaţia razei găurii centrale şi când se adună sistemele de tensiuni rezultă o relaţie între deplasările radiale similară cu (6.58)

$$u_b^{(1)} + k\,u_b^{(2)} = u_b\,. \tag{6.58, *a*}$$

Exemplul 6.2

Se consideră discul de turbină cu abur din figura 6.12, *a*, cu $\nu = 0{,}3$ şi $\rho = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$, care se roteşte cu turația constantă $n = 3000\,\mathrm{rot/min}$. Intensitatea sarcinii uniform distribuite la exteriorul obezii este $\sigma_{rb} = 70\,\mathrm{MPa}$. Presiunea de contact la interior produce tensiuni radiale $\sigma_{ra} = -15\,\mathrm{MPa}$. Variația temperaturii şi a produsului $E\alpha$ cu raza discului sunt date în (Malinin, 1959).

Diagramele tensiunilor radiale şi circumferențiale sunt prezentate în figura 6.12, *b*.



a *b*

Fig. 6.12

Exemplul 6.3

Se consideră un disc de turbină axială cu gaze, fără gaură centrală (Fig. 6.13, *a*), care se roteşte cu turația constantă $n = 11500\,\mathrm{rot/min}$ şi are $\sigma_{rb} = 59{,}8\,\mathrm{MPa}$ şi $\rho = 8000\,\mathrm{kg/m^3}$ (Malinin, 1959). Diagrama de variație a temperaturii în lungul razei este prezentată în figura 6.13, *b*.

Variația lui α, E şi ν în funcție de temperatură este dată în figura 6.14. Pe această bază s-au trasat diagramele de variație în funcție de rază ale mărimilor α (fig. 6.13, *c*), αT (fig. 6.13, *d*), E (fig. 6.13, *e*), şi ν (fig. 6.13, *f*).

Profilul discului se înlocuieşte cu un profil în trepte constând din opt segmente de lățime constantă.

Diagramele de variație cu raza ale modulului de elasticitate E şi coeficientului de contracție transversală ν se înlocuiesc cu diagrame în trepte.

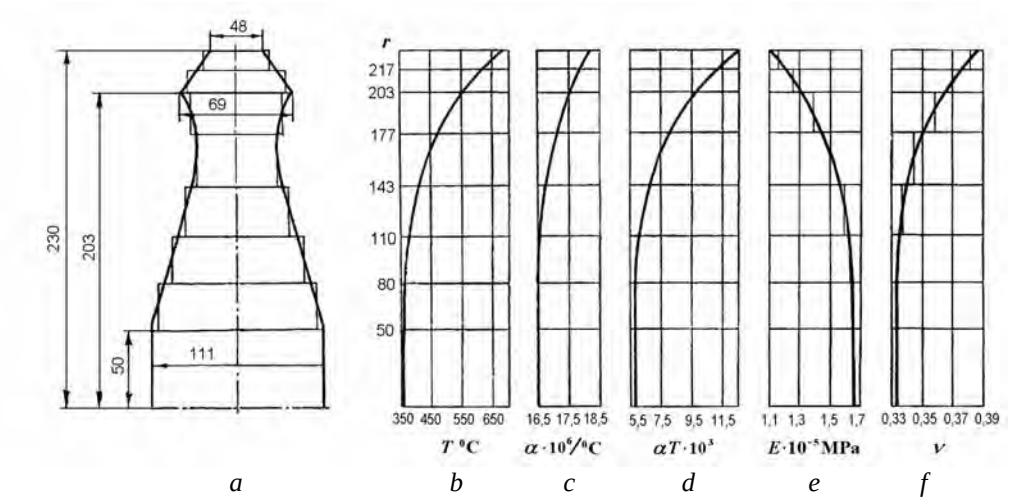


Fig. 6.13

Diagramele tensiunilor radiale şi circumferențiale sunt reprezentate în figura 6.15.

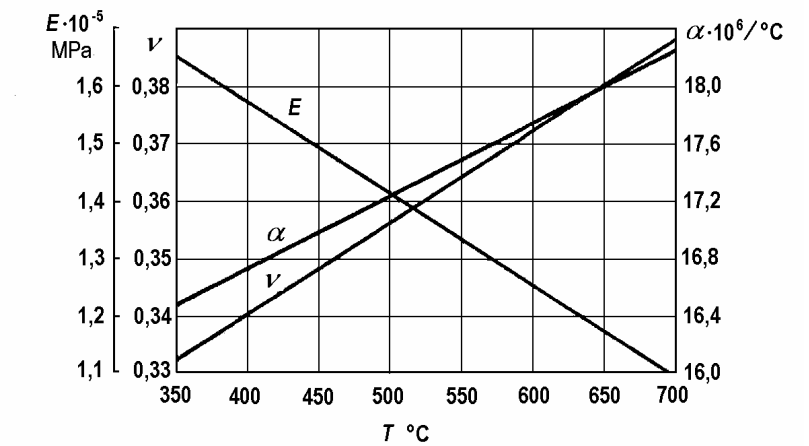


Fig. 6.14

Se constată că variația lui ν cu temperatura are o influență neglijabilă asupra valorii tensiunilor din disc şi ca atare poate fi neglijată.

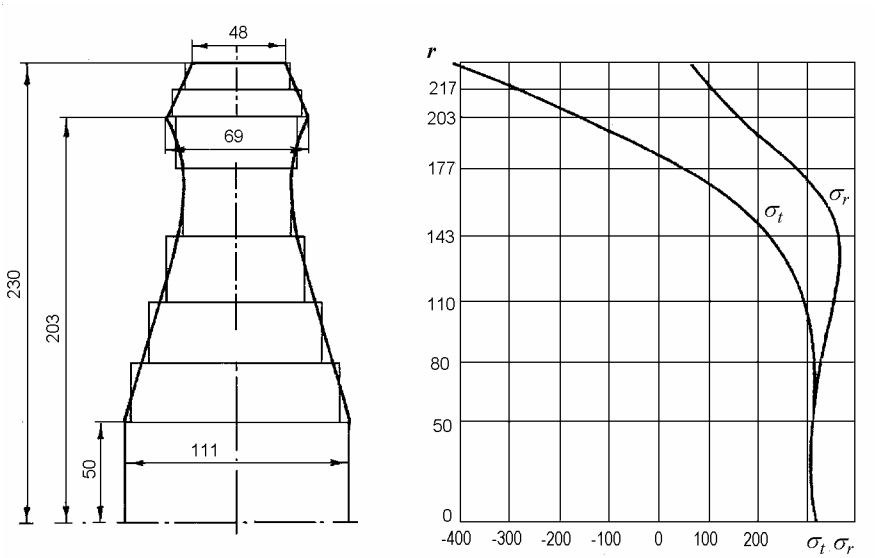


Fig. 6.15

6.3.2 Metoda diferențelor finite

Ecuația de echilibru (6.1, *a*) şi relația de compatibilitate (6.49) se pot scrie în forma cu diferențe finite. Dacă integrarea se face cu "regula dreptunghiurilor", se obțin următoarele relații

$$\sigma_{r,i+1} = \frac{h_i \Delta r_i}{h_{i+1} r_{i+1}} \sigma_{t,i} + \frac{h_i r_i}{h_{i+1} r_{i+1}} \sigma_{r,i} - \frac{h_i r_i}{h_{i+1} r_{i+1}} \Delta r_i \rho \omega^2 r_i , \tag{6.61}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{t,i+1} = {} & \nu_{i+1} \sigma_{r,i+1} + \sigma_{t,i} \frac{E_{i+1}}{E_i} \left[1 - \frac{(1+\nu_i)\Delta r_i}{r_i} \right] - \\ & - \sigma_{r,i} \frac{E_{i+1}}{E_i} \left[\nu_i - \frac{(1+\nu_i)\Delta r_i}{r_i} \right] - E_{i+1} \left(\alpha_{i+1} T_{i+1} - \alpha_i T_i \right), \end{aligned} \tag{6.62}$$

în care $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$.

O aproximare mai bună se obține utilizând metoda lui Manson (1947), în care integrarea se face cu "regula trapezelor".

De remarcat faptul că în acest caz discul real nu se mai înlocuieşte cu un disc în trepte. În schimb, în lungul razei se fixează un număr de puncte care definesc valorile discrete ale razei discului la care se evaluează mărimile care

intervin în calcule, lucrându-se cu grosimile şi valorile constantelor fizice la razele respective. Pentru evitarea confuziilor faţă de notaţiile din metoda celor două calcule, în acest caz se utilizează indicele curent *n* în loc de *i*.

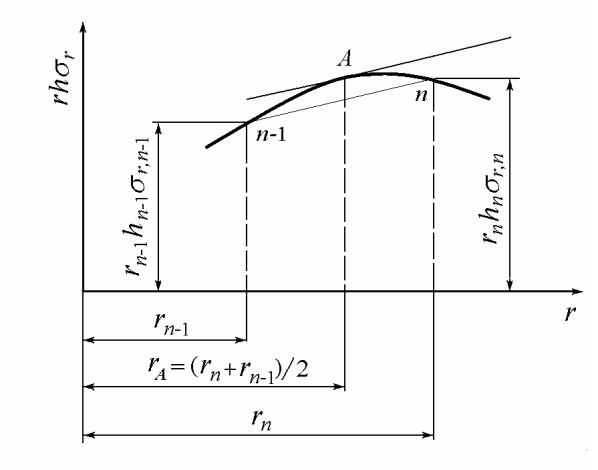


Fig. 6.16

Dacă se presupune că tensiunile în disc au fost determinate, atunci cantităţile care apar în ecuaţiile (6.1, *a*) şi (6.49) sunt cunoscute la fiecare valoare discretă a razei. De exemplu, dacă se cunoaşte diagrama de variaţie a produsului $rh\sigma_r$ în funcţie de raza *r* (fig. 6.16), deci se cunosc valorile funcţiei în punctele $(n-1)$ şi *n*, atunci valoarea funcţiei în punctul median *A*, de rază

$$r_A = \frac{1}{2}\left(r_{n-1} + r_n\right), \tag{6.63}$$

este

$$\left(rh\sigma_r\right)_A \approx \frac{1}{2}\left(r_{n-1}h_{n-1}\sigma_{r,n-1} + r_n h_n \sigma_{r,n}\right) \tag{6.64}$$

iar panta tangentei la curbă în *A*, aproximativ egală cu panta coardei care uneşte punctele $(n-1)$ şi *n* este

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rh\sigma_r\right)_A \approx \frac{r_n h_n \sigma_{r,n} - r_{n-1}h_{n-1}\sigma_{r,n-1}}{r_n - r_{n-1}}\ . \tag{6.65}$$

În mod asemănător se evaluează la mijlocul intervalului valorile celorlalte variabile din ecuaţiile (6.1, *a*) şi (6.49). Înlocuite apoi în aceste ecuaţii, se obţine sistemul de ecuaţii cu diferenţe finite

$$\frac{r_n h_n \sigma_{r,n} - r_{n-1} h_{n-1} \sigma_{r,n-1}}{r_n - r_{n-1}} - \frac{h_n \sigma_{t,n} + h_{n-1} \sigma_{t,n-1}}{2} + \\ + \frac{\omega^2}{2} \left(\rho_n h_n r_n^2 + \rho_{n-1} h_{n-1} r_{n-1}^2 \right) = 0 \tag{6.66}$$

şi

$$\frac{\frac{\sigma_{t,n}}{E_n} - \frac{\sigma_{t,n-1}}{E_{n-1}}}{r_n - r_{n-1}} - \frac{\frac{\nu_n \sigma_{r,n}}{E_n} - \frac{\nu_{n-1} \sigma_{r,n-1}}{E_{n-1}}}{r_n - r_{n-1}} + \frac{\alpha_n T_n - \alpha_{n-1} T_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} - \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{(1+\nu_n)(\sigma_{r,n} - \sigma_{t,n})}{E_n r_n} + \frac{(1+\nu_{n-1})(\sigma_{r,n-1} - \sigma_{t,n-1})}{E_{n-1} r_{n-1}} \right] = 0 \tag{6.67}$$

care se reduce la

$$C_n \sigma_{r,n} - D_n \sigma_{t,n} = F_n \sigma_{r,n-1} + G_n \sigma_{t,n-1} - H_n , \tag{6.68}$$

$$C_n' \sigma_{r,n} - D_n' \sigma_{t,n} = F_n' \sigma_{r,n-1} - G_n' \sigma_{t,n-1} + H_n' , \tag{6.69}$$

unde

$$C_n = r_n h_n , \quad C_n' = \frac{\nu_n}{E_n} + \frac{(1+\nu_n)(r_n - r_{n-1})}{2 E_n r_n} , \\ D_n = \frac{1}{2} (r_n - r_{n-1}) h_n , \quad D_n' = \frac{1}{E_n} + \frac{(1+\nu_n)(r_n - r_{n-1})}{2 E_n r_n} , \\ F_n = r_{n-1} h_{n-1} , \quad F_n' = \frac{\nu_{n-1}}{E_{n-1}} - \frac{(1+\nu_{n-1})(r_n - r_{n-1})}{2 E_{n-1} r_{n-1}} , \\ G_n = \frac{1}{2} (r_n - r_{n-1}) h_{n-1} , \quad G_n' = \frac{1}{E_{n-1}} - \frac{(1+\nu_{n-1})(r_n - r_{n-1})}{2 E_{n-1} r_{n-1}} , \\ H_n = \frac{\omega^2}{2} (r_n - r_{n-1}) \left(\rho_n h_n r_n^2 + \rho_{n-1} h_{n-1} r_{n-1}^2 \right), \\ H_n' = \alpha_n T_n - \alpha_{n-1} T_{n-1} . \tag{6.70}$$

În ecuațiile (6.68) şi (6.69), tensiunile $\sigma_{r,n}$ şi $\sigma_{t,n}$ sunt exprimate în funcție de $\sigma_{r,n-1}$ şi $\sigma_{t,n-1}$. Rezultă că, prin aplicarea succesivă a acestor ecuații de la o rază la alta, tensiunile la o rază oarecare se pot exprima în funcție de tensiunile la orice altă rază, în particular în funcție de tensiunile la raza interioară *a*, unde necunoscuta este tensiunea circumferențială σ_{ta}.

Tensiunile la raza *n* se exprimă în funcție de σ_{ta} prin relațiile liniare

$$\begin{aligned}\sigma_{r,n} &= A_{r,n}\sigma_{ta} + B_{r,n},\\ \sigma_{t,n} &= A_{t,n}\sigma_{ta} + B_{t,n},\end{aligned} \tag{6.71}$$

la fel, tensiunile la raza $(n-1)$ se exprimă în funcție de σ_{ta} prin relațiile liniare

$$\begin{aligned}\sigma_{r,n-1} &= A_{r,n-1}\sigma_{ta} + B_{r,n-1},\\ \sigma_{t,n-1} &= A_{t,n-1}\sigma_{ta} + B_{t,n-1},\end{aligned} \tag{6.72}$$

în care urmează a se determina coeficienții

$$\begin{aligned}A_{r,n} &= K_n A_{r,n-1} + L_n A_{t,n-1},\\ A_{t,n} &= K'_n A_{r,n-1} + L'_n A_{t,n-1},\\ B_{r,n} &= K_n B_{r,n-1} + L_n B_{t,n-1} + M_n,\\ B_{t,n} &= K'_n B_{r,n-1} + L'_n B_{t,n-1} + M'_n,\end{aligned} \tag{6.73}$$

unde

$$\begin{aligned}K_n &= \frac{F'_n D_n - F_n D'_n}{C'_n D_n - C_n D'_n}, \quad K'_n = \frac{F'_n C_n - F_n C'_n}{C'_n D_n - C_n D'_n},\\ L_n &= -\frac{G'_n D_n + G_n D'_n}{C'_n D_n - C_n D'_n}, \quad L'_n = -\frac{C'_n G_n + C_n G'_n}{C'_n D_n - C_n D'_n},\\ M_n &= \frac{H'_n D_n + H_n D'_n}{C'_n D_n - C_n D'_n}, \quad M'_n = \frac{C'_n H_n + C_n H'_n}{C'_n D_n - C_n D'_n}.\end{aligned} \tag{6.74}$$

Dacă se cunosc coeficienții A_r, A_t, B_r, B_t la raza $(n-1)$, din relațiile (6.73) se calculează coeficienții la raza *n*.

La un disc cu gaură concentrică, în care la interior tensiunile radiale sunt nule şi tensiunea circumferențială este σ_{ta}

$$\begin{aligned}A_{r,a} &= B_{r,a} = B_{t,a} = 0,\\ A_{t,a} &= 1.\end{aligned} \tag{6.75}$$

La un disc plin, la care în centru tensiunea radială şi tensiunea circumferențială sunt egale cu σ_{ta}

$$\begin{aligned}A_{r,a} &= A_{t,a} = 1,\\ B_{r,a} &= B_{t,a} = 0.\end{aligned} \tag{6.76}$$

Pornind de la aceşti coeficienți la interiorul discului, se pot determina valorile coeficienților la celelalte raze, prin aplicarea succesivă a relațiilor (6.73). În final, deoarece tensiunea radială la exteriorul obezii σ_{rb}, produsă de încărcarea centrifugală a paletelor, este

$$\sigma_{rb} = A_{r,b}\sigma_{ta} + B_{r,b},$$

se obține

$$\sigma_{ta} = \frac{\sigma_{rb} - B_{r,b}}{A_{r,b}} \tag{6.77}$$

unde $A_{r,b}$ şi $B_{r,b}$ sunt coeficienții tensiunilor radiale la exteriorul discului.

După determinarea lui σ_{ta} şi a tuturor coeficienților $A_{r,n}$, $A_{t,n}$, $B_{r,n}$, $B_{t,n}$, se pot determina valorile tensiunilor radiale şi circumferențiale la toate razele, din ecuația (6.71).

Manson (1947) prezintă o discuție asupra alegerii corecte a temperaturii T_n la fiecare rază, precum şi a valorii coeficientului de dilatare termică liniară α_n, ca medie între valoarea la temperatura cu tensiuni nule şi valoarea la temperatura de lucru a discului.

Simulări numerice au arătat că montarea discului pe arbore prin fretare poate reduce tensiunile din disc dacă presiunea de contact nu este prea mare. Asamblarea cu strângere reduce atât tensiunile circumferențiale de întindere din vecinătatea găurii centrale cât şi tensiunile circumferențiale de compresiune din obadă. Dacă tensiunile circumferențiale elastice în obadă depăşesc limita de curgere a materialului, apare curgerea plastică care produce tensiuni circumferențiale reziduale de întindere. Deoarece obada este o zonă cu concentratori de tensiuni datorită prinderii paletelor, este posibil ca tensiuni de întindere de valori mici să producă fisuri.

Rezolvarea problemei inverse, determinarea profilului discului pe baza unor valori date ale tensiunilor, se poate face pe baza echivalentei cu diferențe finite a ecuației (6.1).

$$\frac{h_{n-1}}{h_n} = \frac{\dfrac{2r_n}{r_n - r_{n-1}}\sigma_{r,n} - \sigma_{t,n} + \rho_n\omega^2 r_n^2}{\dfrac{2r_{n-1}}{r_n - r_{n-1}}\sigma_{r,n-1} + \sigma_{t,n-1} - \rho_{n-1}\omega^2 r_{n-1}^2}.$$

Pentru utilizarea relației de mai sus se utilizează o valoare inițială a grosimii, deobicei la nivelul obezii, calculată pentru a rezista smulgerii paletelor prin efect centrifugal.

6.4 Cilindri în rotație

Turbinele cu abur, de presiune înaltă şi de presiune medie, precum şi turbine cu gaze de putere mică, în variante constructive mai vechi, au rotoare monobloc care se modelează ca cilindri în rotație.

Spre deosebire de discuri, supuse la o stare plană de tensiuni, rotoarele monobloc de tip tambur se modelează ca cilindri în rotație supuşi la o stare plană de deformații specifice.

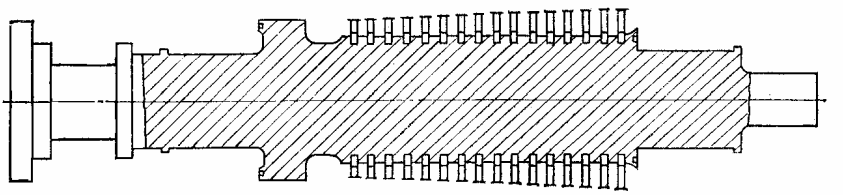


Fig. 6.17

În figura 6.17 se prezintă rotorul de tip tambur, fără gaură centrală, al unei turbine cu abur. Datorită constrângerilor de dilatare, în astfel de rotoare apar tensiuni termice tranzitorii relativ mari, în special la o pornire la rece a turbinei. În afara tensiunilor circumferențiale mari, în rotor apar şi tensiuni longitudinale. Starea spațială de tensiuni măreşte sensibilitatea rotorului la ruperi fragile.

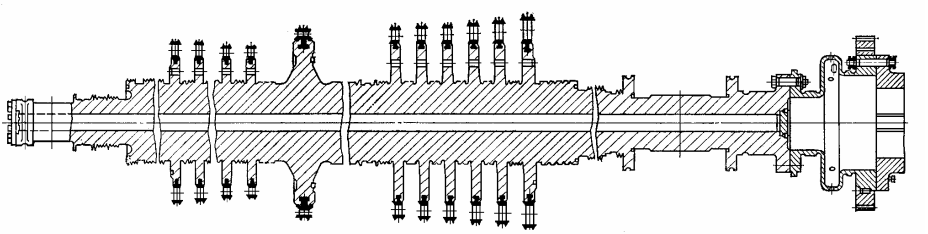


Fig. 6.18

În figura 6.18 se prezintă rotorul monobloc al unei turbine cu abur, de înaltă presiune, cu gaură centrală şi discuri integrate (Kostiuk şi Frolov, 1985). Gaura centrală duce la creşterea tensiunilor termice şi a celor produse de câmpul centrifugal. La capătul cu temperatură înaltă al rotorului, tensiunile produse de rotație sunt diminuate de relaxarea prin fluaj. La capătul cu temperatură joasă al rotorului, tensiunile mărite datorită găurii centrale reduc mărimea defectului critic, deci măresc riscul ruperii fragile.

Gaura centrală elimină segregațiile şi incluziunile nemetalice din centrul rotorului, permite prelevarea de epruvete pentru determinarea proprietăților mecanice şi accesul pentru încercarea cu ultrasunete.

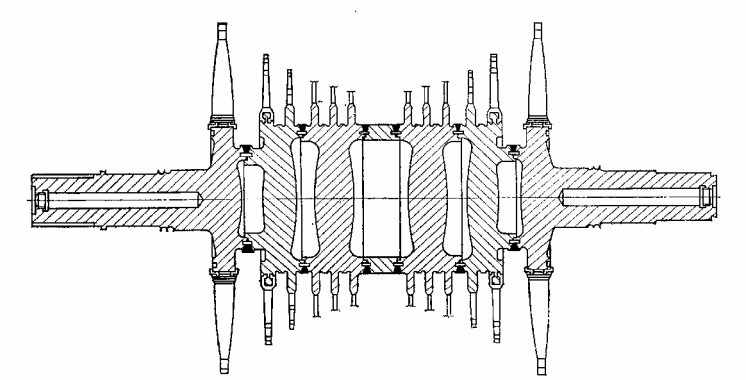


Fig. 6.19

Pentru înlăturarea inconvenientelor rotoarelor monobloc, în prezent se utilizează rotoare sudate (fig. 6.19). Acestea constau din mai multe discuri sudate între ele la periferie, care sunt solicitate la o stare plană de tensiuni. De aici – tensiuni longitudinale mai mici.

Teoretic, tensiunile termice circumferențiale care apar în aceste rotoare la pornirea sau oprirea turbinei sunt cu 43% mai mici decât într-un rotor monobloc. Într-adevăr, valorile tensiunilor circumferențiale dintr-un cilindru din oțel, în stare plană de deformații specifice, se pot obține direct din tensiunile calculate pentru un disc în stare plană de tensiuni prin înmulțire cu $1/(1-\nu)\approx 1{,}43$.

La turbinele moderne, în care se ating temperaturi de $580-600^0\mathrm{C}$, se utilizează oțeluri cu 10% crom, având limita de curgere tehnică $\sigma_{0,2}=700$ MPa şi rezistența la fluaj (la 100 000 ore şi $600^0\mathrm{C}$) de aproximativ 100 MPa.

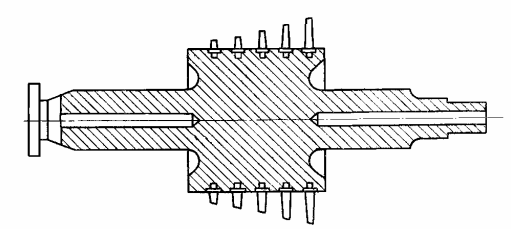


Fig. 6.20

În figura 6.20 se prezintă rotorul monobloc al unei turbine cu gaze, de mică putere, care în partea din mijloc nu are gaură, pentru evitarea tensiunilor mari datorită efectelor centrifugale (Kostiuk şi Frolov, 1985).

6.4.1 Soluția generală

Ecuația de echilibru (6.1) este

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sigma_r \cdot r\right) - \sigma_t = -\rho\,\omega^2 r^2 . \tag{6.78}$$

Înlocuind deformațiile specifice (5.9) şi (5.10) în ecuația de compatibilitate (6.4) şi ținând cont de (6.78), se obține a doua relație între tensiuni

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sigma_t \cdot r\right) - \sigma_r = -\frac{\nu}{1-\nu}\rho\,\omega^2 r^2 - \frac{E\alpha}{1-\nu} r \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} . \tag{6.79}$$

Eliminând σ_t între relațiile (6.78) şi (6.79), se obține ecuația diferențială

$$r\,\frac{\mathrm{d}^2\sigma_r}{\mathrm{d}r^2} + 3\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} = -\frac{3-2\nu}{1-\nu}\rho\,\omega^2 r - \frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} , \tag{6.80}$$

care se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sigma_r r^2\right)\right] = -\frac{3-2\nu}{1-\nu}\rho\,\omega^2 r - \frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} . \tag{6.81}$$

Considerând E, ν şi α constante, soluția ecuației (6.81) are forma

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{3-2\nu}{1-\nu}\rho\,\omega^2\frac{r^2}{8} - \frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int_a^r T r\,\mathrm{d}r . \tag{6.82}$$

Înlocuind (6.82) în (6.78) rezultă

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3-2\nu}{1-\nu}\rho\,\omega^2\frac{r^2}{8} + \frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int_a^r T r\,\mathrm{d}r - E\alpha T . \tag{6.83}$$

În membrul drept al expresiilor (6.82) şi (6.83) primii doi termeni reprezintă soluția ecuației omogene în care constantele de integrare se determină din condițiile la limită, respectiv valorile tensiunilor radiale la interiorul (centrul) şi exteriorul cilindrului. Termenul al doilea este soluția particulară corespunzătoare încărcării centrifugale iar termenul al treilea şi al patrulea sunt tensiunile termice.

Rezultă că valorile tensiunilor se obțin prin suprapunerea diagramelor celor trei tipuri de tensiuni. Întrucât tensiunile pentru cilindri cu presiune exterioară (efectul paletelor) sunt prezentate în relațiile (5.58) şi figura 5.5, iar tensiunile termice sunt date de relațiile (5.14) şi (5.18) şi ilustrate în figura 5.3 pentru o distribuție logaritmică a temperaturii, în continuare se vor analiza numai tensiunile produse de încărcarea centrifugală.

6.4.2 Cilindrul cu gaură centrală

Într-un cilindru lung în rotație, cu gaură centrală, neglijând efectele termice, tensiunile au expresiile

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{\rho\omega^2(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\, r^2, \tag{6.84}$$

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{\rho\omega^2(1+2\nu)}{8(1-\nu)}\, r^2. \tag{6.85}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile la limită

la $r = a$, $\sigma_r = 0$ şi la $r = b$, $\sigma_r = 0$.

Rezultă

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right), \tag{6.86}$$

$$\sigma_t = \frac{\rho\omega^2(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+2\nu}{3-2\nu}r^2\right). \tag{6.87}$$

În cilindrul liber la capete

$$\sigma_z = \frac{\rho\omega^2\nu}{4(1-\nu)}\left(b^2 + a^2 - 2r^2\right). \tag{6.88}$$

Tensiunea tangențială maximă, la $r = a$, este

$$\sigma_{t_{\max}} = \frac{(3-2\nu)\rho\omega^2}{4(1-\nu)}\left(b^2 + \frac{1-2\nu}{3-2\nu}a^2\right), \tag{6.89}$$

iar tensiunea tangențială minimă, la $r = b$, este

$$\sigma_{t_{\min}} = \frac{(3-2\nu)\rho\omega^2}{4(1-\nu)}\left(a^2 + \frac{1-2\nu}{3-2\nu}b^2\right). \tag{6.90}$$

Tensiunea radială maximă

$$\sigma_{r_{\max}} = \frac{(3-2\nu)\rho\omega^2}{8(1-\nu)}(b-a)^2 \tag{6.91}$$

apare la $r = \sqrt{ab}$.

În cilindrul liber la capete, tensiunile longitudinale maxime sunt

$$\sigma_{z_{\max}} = \left|\sigma_{z_{\min}}\right| = \frac{\rho\omega^2\nu}{4(1-\nu)}\left(b^2 - a^2\right). \tag{6.92}$$

Diagramele de variație ale tensiunilor în lungul razei sunt prezentate în figura 6.21.

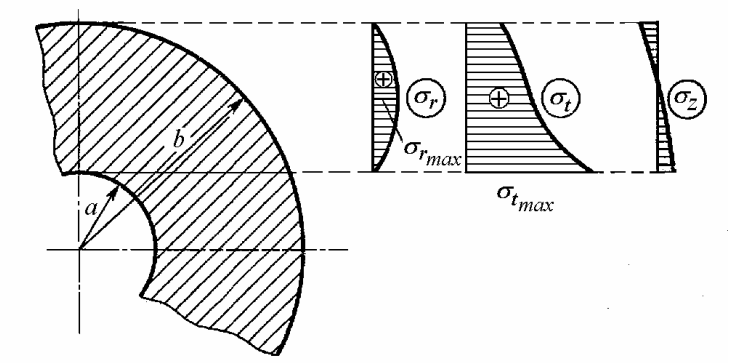


Fig. 6.21

Pentru $b = 3a$, la un cilindru din oțel $(\nu = 0{,}3)$ în rotație

$$\sigma_{t\,\max} = 6{,}97\frac{\rho\omega^2 b^2}{8}\ .$$

La discul subțire în rotație, din (6.41) rezultă pentru oțel

$$\sigma_{t\,\max} = 6{,}75\frac{\rho\omega^2 b^2}{8}\ ,$$

deci în disc tensiunea maximă este puțin mai mică decât în cilindru.

Când $a \to 0$, deci la cilindrul cu gaură foarte mică

$$\sigma_{t_{\max}} = \frac{(3-2\nu)\rho\omega^2 b^2}{4(1-\nu)}\ . \tag{6.93}$$

6.4.3 Cilindrul plin

În acest caz, constantele de integrare se determină din condițiile la limită

$$\text{la } r=0,\ \sigma_r=\sigma_t \quad \text{şi la} \quad r=b,\ \sigma_r=0.$$

Rezultă

$$\sigma_r=\frac{\rho\omega^2(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\left(b^2-r^2\right), \tag{6.94}$$

$$\sigma_t=\frac{\rho\omega^2(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\left(b^2-\frac{1+2\nu}{3-2\nu}r^2\right). \tag{6.95}$$

În cilindrul liber la capete, tensiunile longitudinale sunt

$$\sigma_z=\frac{\rho\omega^2\nu}{4(1-\nu)}\left(b^2-2r^2\right). \tag{6.96}$$

Diagramele de variație ale tensiunilor în lungul razei sunt prezentate în figura 6.22.

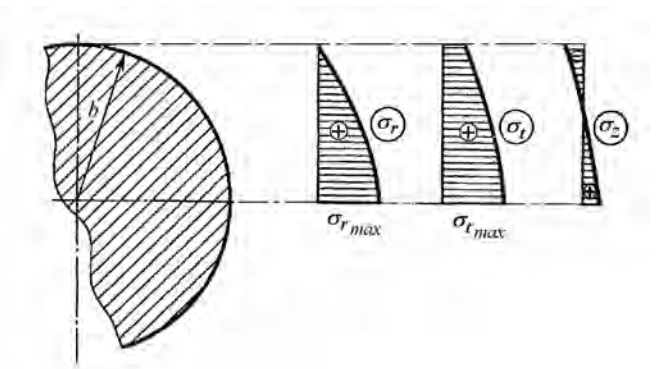


Fig. 6.22

La $r=0$

$$\sigma_{r\max}=\sigma_{t\max}=\frac{(3-2\nu)\rho\omega^2b^2}{8(1-\nu)}\ , \tag{6.97}$$

valori de două ori mai mici decât la cilindrul cu gaură centrală mică (6.93).

La un cilindru din oțel fără gaură centrală

$$\sigma_{t\max}=3{,}43\frac{\rho\omega^2b^2}{8}\ ,$$

în timp ce la un disc din oțel fără gaură centrală (6.47)

$$\sigma_{t\,\max} = 3{,}30\,\frac{\rho\,\omega^2 b^2}{8}\ .$$

La $r = b$

$$\sigma_{t\,\min} = \frac{(1-2\nu)\rho\,\omega^2 b^2}{4(1-\nu)}\ . \tag{6.98}$$

În cilindrul plin liber la capete, tensiunile longitudinale maxime sunt

$$\sigma_{z_{\max}} = \left|\sigma_{z_{\min}}\right| = \frac{\rho\,\omega^2\,\nu}{4\,(1-\nu)}\ b^2\,. \tag{6.99}$$

6.4.4 Simulări numerice

La rotoarele monobloc cu gaură centrală, tensiunile circumferențiale sunt teoretic de două ori mai mari decât în rotoarele fără gaură.

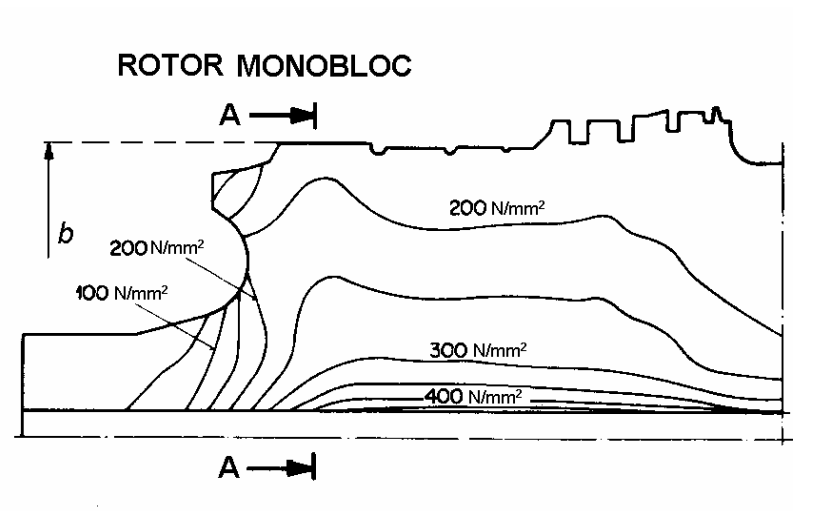


Fig. 6.23

În figura 6.23 se arată distribuția tensiunilor circumferențiale în rotorul monobloc de joasă presiune al unei turbine de 300 MW cu turația $3000\ \text{rot}/\text{min}$.

În figura 6.24 se arată distribuția tensiunilor circumferențiale într-un rotor sudat, cu acelaşi contur şi aceeaşi rază exterioară *b* (Bertilsson şi Berg, 1980).

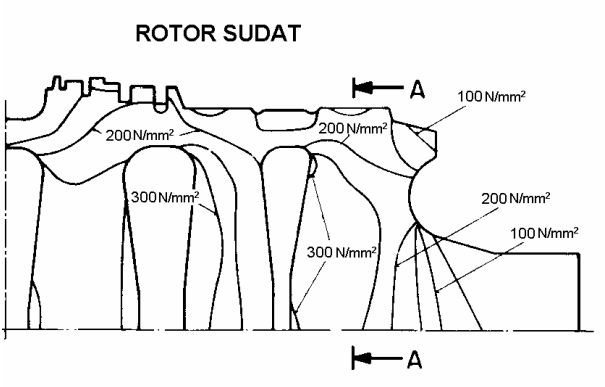


Fig. 6.24

În figura 6.25 se compară diagramele de variație ale tensiunilor circumferențiale în secțiunile A-A ale celor două rotoare. Se observă că în rotorul monobloc tensiunile maxime sunt de 1,6 ori mai mari decât în rotorul sudat.

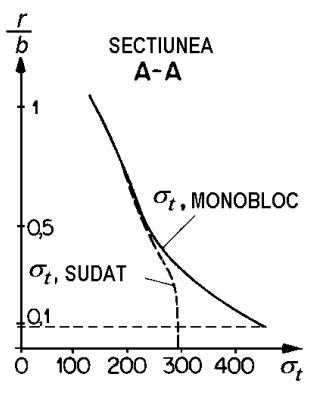


Fig. 6.25

O comparație a tensiunilor ce apar într-un rotor sudat (a) şi un rotor cu discuri fretate pe arbore (b) este prezentată în figura 6.26, unde $\sigma_{0,2}$ este limita de curgere tehnică, σ_t - tensiunile circumferențiale elastice şi σ_{tp} - tensiunile circumferențiale elasto-plastice (Bertilsson ş.a., 1981).

Se observă că tensiunile circumferențiale în discurile fretate pe arbore sunt mai mari decât tensiunile din rotorul sudat.

În figura 6.27 se arată distribuția tensiunilor în discul rotorului de joasă presiune al unei turbine de 1300 MW, la turația zero şi la turația nominală de 1500 rot/min. Se remarcă valorile mari ale tensiunilor produse de un montaj cu strângere de 2‰, necesar asigurării contactului la supraturații de 35%.

În figura 6.28 se compară distribuția tensiunilor circumferențiale în discul unui rotor sudat şi un disc fretat pe arbore. Se remarcă din nou efectul de concentrare a tensiunilor în discul cu gaură centrală, accentuat de presiunea de contact pe arbore.

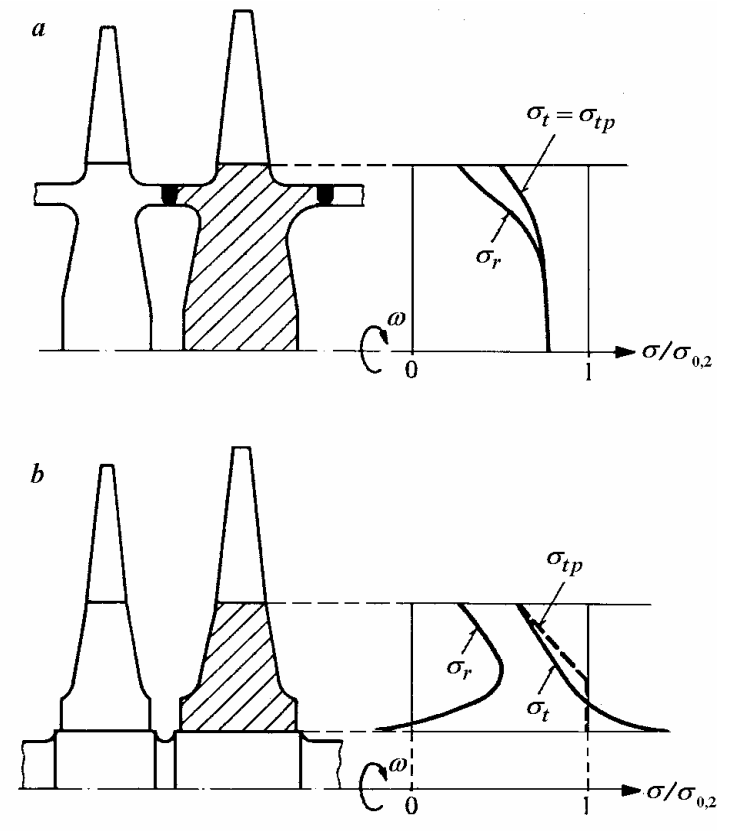


Fig. 6.26

Rotorul sudat înlătură problemele de concentrare a tensiunilor şi coroziune în jurul canalelor de pană. Sudarea discurilor între ele se face la periferie, în zona de tensiuni relativ mici, unde efectul oboselii datorită caracterului ciclic al tensiunilor de încovoiere este minim, iar pericolul de "explozie" a rotorului este practic îndepărtat.

În figura 6.29 se arată variația tensiunilor termice măsurate în punctele D, F, J, L, W în timpul pornirii la rece a unui rotor sudat, de înaltă presiune, al unei turbine de 500 MW (Hohn ş.a., 1980).

Pe axa ordonatelor s-a reprezentat raportul între tensiunea echivalentă $\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2}$ şi limita de curgere σ_c la temperatura de lucru.

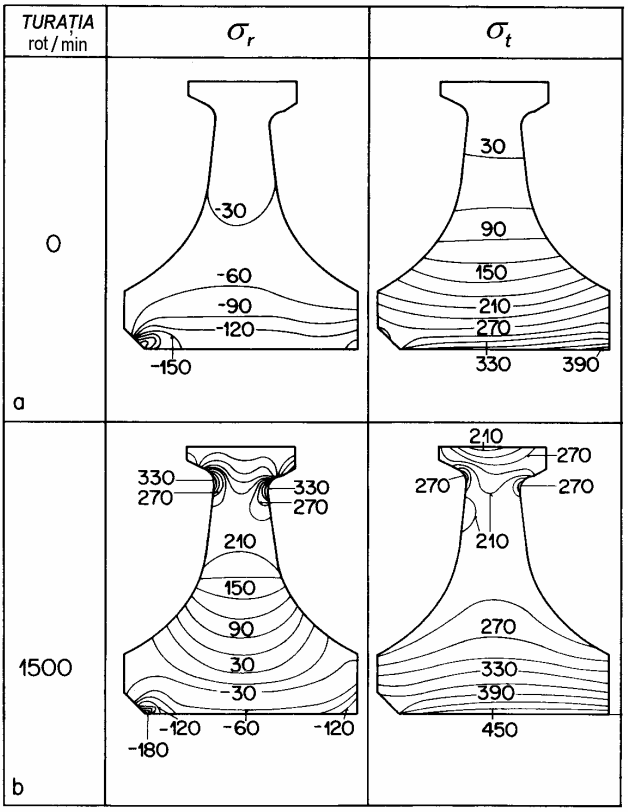


Fig. 6.27

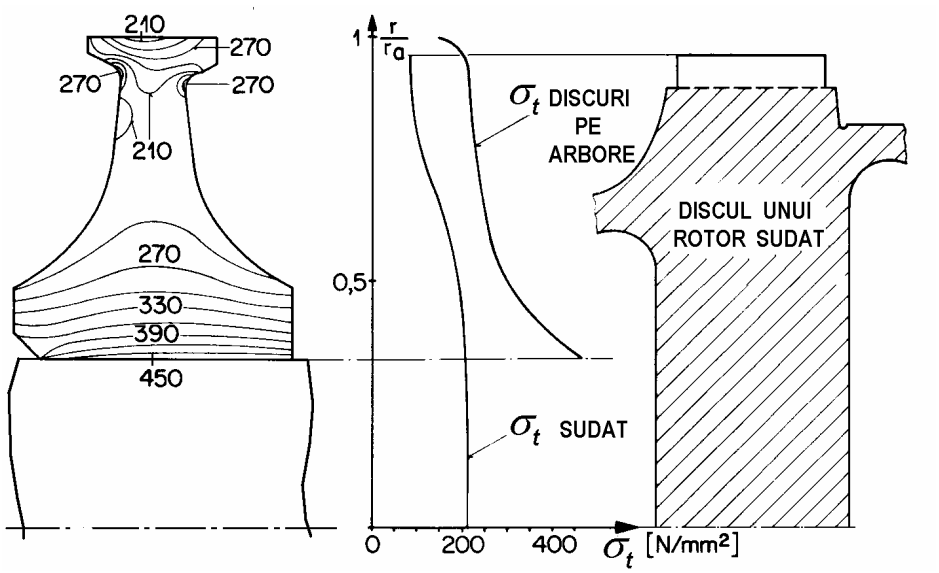


Fig. 6.28

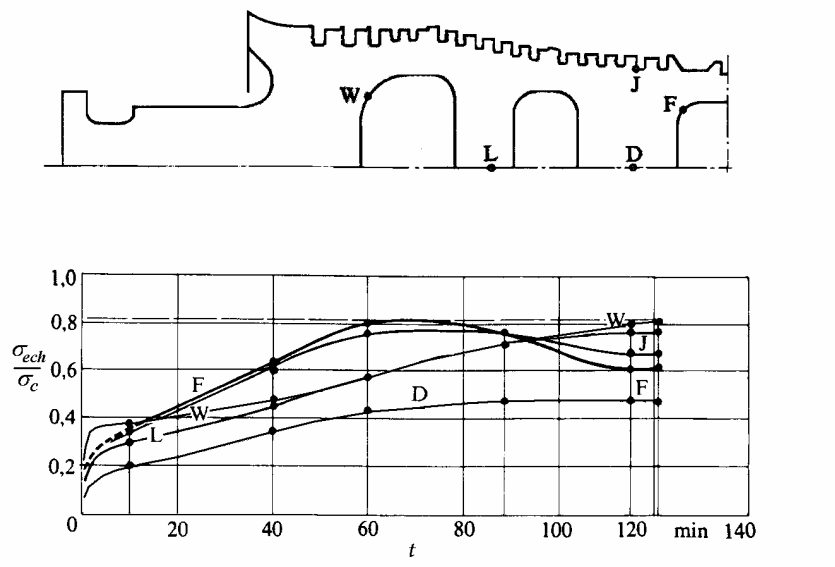


Fig. 6.29

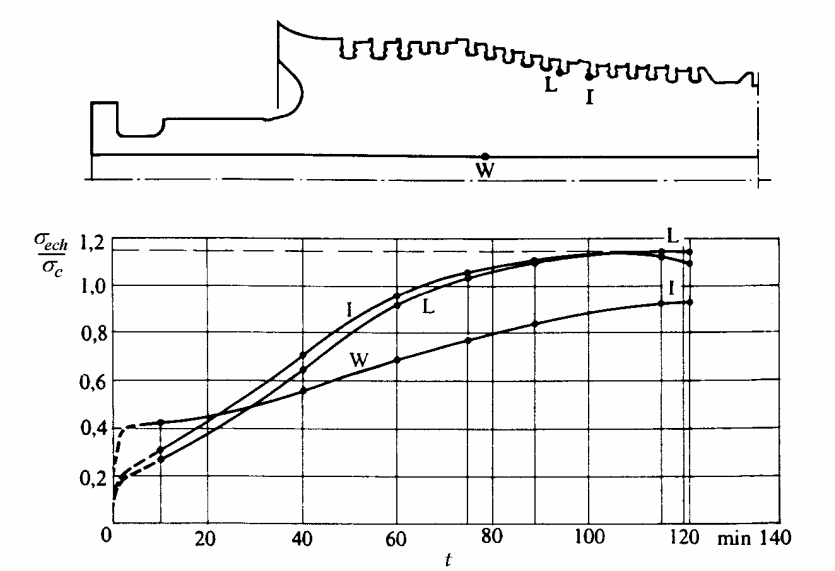


Fig. 6.30

Pentru comparație, în figura 6.30 se prezintă aceleaşi valori înregistrate la un rotor monobloc cu gaură centrală, în punctele L, I, W. Se observă că în zona fixării paletelor (L şi I) tensiunile în rotorul monobloc sunt cu 40% mai mari decât tensiunile corespunzătoare din rotorul sudat (J).

7.
PLĂCI PLANE SUBȚIRI

În acest capitol se studiază încovoierea plăcilor plane subțiri, la care temperatura variază pe grosimea plăcii. În afara tensiunilor termice de încovoiere, în plăci apar şi tensiuni de membrană, tratate în Capitolul 5, şi tensiuni produse de sarcinile exterioare. Se prezintă doar câteva cazuri simple, care permit soluții analitice închise, pentru familiarizarea cu mărimile specifice şi "efectele de placă". Problemele practice se rezolvă utilizând metoda elementelor finite şi programe adecvate de calcul.

În ingineria mecanică, se întâlnesc componente care se pot modela ca plăci în carcase, recipiente, suporți, corpurile lagărelor, diafragme cu rol de şicane, atenuatoare de fluctuații de presiune sau elemente elastice în aparatele de măsură şi control.

7.1 Ipotezele teoriei încovoierii plăcilor subțiri

Plăcile sunt corpuri plane, mărginite de două suprafețe, situate la distanță mică în comparație cu dimensiunile acestora. Pe scurt, plăcile sunt corpuri care au două dimensiuni mai mari cu cel puțin un ordin de mărime decât a treia. Cele două elemente definitorii ale unei plăci sunt suprafața mediană şi grosimea.

Suprafața mediană este egal depărtată de cele două suprafețe care delimitează placa. *Grosimea* este măsurată perpendicular pe suprafața mediană. Plăcile subțiri au grosimea sub $1/10$ din dimensiunile în planul acesteia. În general, plăcile au suprafața mediană plană. Învelişurile au suprafața mediană curbă.

Se admite că materialul plăcii este omogen, izotrop şi elastic liniar. Grosimea plăcii se consideră mică în comparație cu dimensiunile plăcii în planul ei. Săgeata se admite că este mică în comparație cu grosimea plăcii. Ca urmare, în planul median al plăcii nu apar tensiuni de întindere (de membrană), acesta fiind astfel o *suprafață neutră*. Rezultatele obținute sunt strict valabile pentru plăci de grosime constantă.

La plăci cu nervuri de rigidizare, deşi materialul este izotrop, prezența nervurilor face ca rigiditatea la încovoiere să varieze cu direcția. Aceste plăci se numesc *anizotrope constructiv*, cele mai utilizate fiind plăcile *ortotrope constructiv*, cu nervuri perpendiculare între ele. Plăcile din compozite stratificate sunt studiate în manuale de specialitate.

Teoria inginerească a încovoierii plăcilor se bazează pe ipotezele lui G. R. Kirchhoff (1850):

1. *Ipoteza normalei rectilinii*. Normala la suprafața mediană rămâne dreaptă (după încovoierea plăcii) şi perpendiculară pe suprafața mediană deformată.

2. *Ipoteza independenței acțiunii straturilor*. Tensiunile normale pe suprafețe paralele cu suprafața mediană sunt neglijabile. Straturile paralele nu presează unul pe celălalt. Deci se consideră o stare plană de tensiuni.

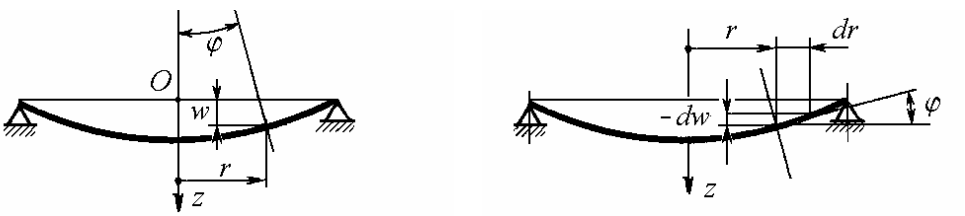
3. Grosimea plăcii nu se modifică în timpul deformării acesteia.

7.2 Încovoierea axial-simetrică a plăcilor circulare

În cazul încovoierii plăcilor circulare, dacă încărcarea este axial-simetrică atunci toate mărimile depind numai de rază, deci problema este unidimensională.

7.2.1 Geometria suprafeței mediane

În figura 7.1, *a* se arată suprafața deformată a plăcii. Originea axelor *O* se alege în centrul plăcii nedeformate, iar axa *z* coincide cu axa de simetrie. Într-un punct de rază *r*, normala la suprafață face unghiul φ cu axa *z*.



a *b*

Fig. 7.1

Pentru unghiuri pozitive de rotire a normalei, $\varphi > 0$, şi pentru o creştere a razei $\mathrm{d}r > 0$, săgeata scade, $\mathrm{d}w < 0$, deci

$$\varphi = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}, \tag{7.1}$$

de unde rezultă săgeata

$$w = -\int \varphi \,\mathrm{d}r + C\,. \tag{7.2}$$

În general, constanta de integrare C se determină din condiția anulării săgeții pe conturul rezemat.

Curbura suprafeței deformate în secțiunea diametrală este

$$\kappa_r = \frac{1}{\rho_r} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \tag{7.3}$$

sau

$$\kappa_r = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\,. \tag{7.4}$$

Curbura în secțiunea care trece prin normala n şi perpendiculara pe planul rz este

$$\kappa_\theta = \frac{1}{\rho_\theta} = \frac{\varphi}{r} \tag{7.5}$$

sau

$$\kappa_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}. \tag{7.6}$$

Curburile (7.4) şi (7.6) sunt curburi principale, deoarece la încovoierea axial-simetrică curbura datorită răsucirii este nulă.

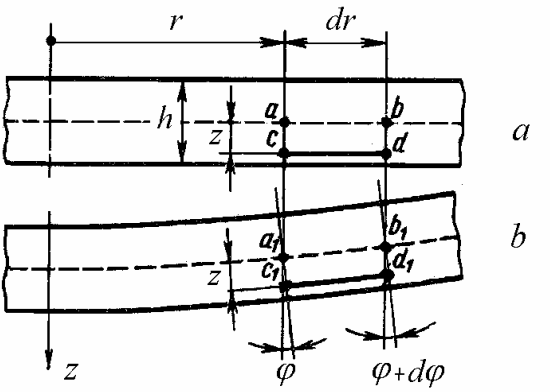


Fig. 7.2

7.2.2 Relații între deformații specifice şi deplasări

În figurile 7.2, *a* şi *b* se prezintă secțiuni prin placă, înainte şi după deformare. În ipoteza deformațiilor mici, datorită săgeților mici, punctele *a* şi *b* din planul median se deplasează numai pe verticală. Normala în *a* la suprafața mediană se roteşte cu unghiul φ, rămânând dreaptă şi perpendiculară pe suprafața mediană deformată a plăcii. Normala în punctul *b* se roteşte cu unghiul $\varphi + \mathrm{d}\varphi$.

Într-un strat situat la distanța *z* de planul median, alungirea specifică radială este

$$\varepsilon_r = \frac{c_1 d_1 - cd}{cd} = \frac{\Delta(\mathrm{d}r)}{\mathrm{d}r},$$

unde $\Delta(\mathrm{d}r) = z\,(\varphi + \mathrm{d}\varphi) - z\varphi = z\,\mathrm{d}\varphi$. Rezultă

$$\varepsilon_r = \frac{d\varphi}{\mathrm{d}r}\,z\,. \tag{7.7}$$

Alungirea specifică circumferențială este egală cu variația relativă a lungimii cercului de rază *r*

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi\,(r + \varphi z) - 2\pi r}{2\pi r},$$

$$\varepsilon_t = \frac{\varphi}{r}\,z\,. \tag{7.8}$$

7.2.3 Relații între tensiuni şi deformații specifice

Pe baza ipotezei independenței acțiunii straturilor, $\sigma_z = 0$, iar legea lui Hooke pentru starea plană de tensiuni (4.36) se scrie

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_t) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \tag{7.9, *a*}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_t + \nu\,\varepsilon_r) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\,. \tag{7.9, *b*}$$

Înlocuind alungirile specifice (7.7) şi (7.8) în relațiile (7.9) rezultă

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E\,z}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} + \nu\,\frac{\varphi}{r}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \\ \sigma_t &= \frac{E\,z}{1-\nu^2}\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Tensiunile normale din placă variază liniar pe grosime (fig. 7.3). În afara acestora, în placă mai acționează şi tensiuni tangențiale τ_{rz} paralele cu axa *Oz*, a căror distribuție pe grosime este parabolică, cu valori nule la extremități.

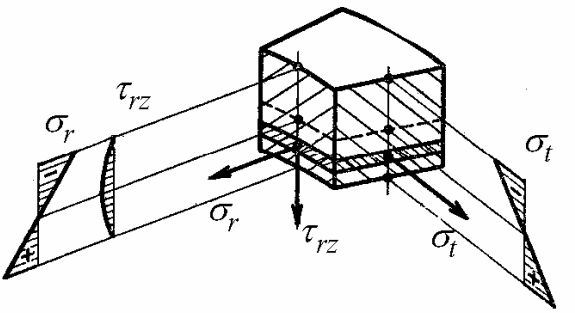


Fig. 7.3

7.2.4 Relații de echivalență între momente şi tensiuni

Echilibrul între momentele interioare, datorite tensiunilor normale ce acționează pe fețele elementului, şi momentele exterioare se scrie sub forma

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_r \mathrm{d}z, \quad M_t = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_t\,\mathrm{d}z\ , \tag{7.11}$$

unde *h* este grosimea plăcii.

Înlocuind tensiunile din ecuațiile (7.10) în relațiile (7.11) şi integrând, se obține

$$\begin{aligned} M_r &= D\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\varphi}{r}\right) - M_T, \\ M_t &= D\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) - M_T\ , \end{aligned} \tag{7.12}$$

unde D este *rigiditatea la încovoiere* a plăcii

$$D = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)} \tag{7.13}$$

iar M_T este momentul încovoietor termic echivalent

$$M_T = \frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} T\,z\,\mathrm{d}z\,. \qquad (7.14)$$

Din relațiile (7.10) şi (7.12) se obțin relațiile de calcul al tensiunilor normale

$$\sigma_r = \frac{12\,z}{h^3}\left(M_r + M_T\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \qquad (7.15,\ a)$$

$$\sigma_t = \frac{12\,z}{h^3}\left(M_t + M_T\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\,. \qquad (7.15,\ b)$$

Acestea au valori extreme la suprafața plăcii, pentru $z = \pm h/2$.

Atât momentele cât şi tensiunile normale depind de unghiul de înclinare al normalei φ, care se determină din ecuațiile de echilibru şi condițiile la limită.

7.2.5 Ecuațiile de echilibru

Un element detaşat din placă prin două plane axiale şi două suprafețe cilindrice concentrice infinit vecine (fig. 7.4, *a*) este în echilibru sub acțiunea sarcinii exterioare *q* şi a momentelor şi forțelor tăietoare distribuite liniar. Datorită simetriei, pe fețele din planele axiale ale acestui element nu acționează forțe tăietoare. Fie M_t momentul încovoietor circumferențial, M_r momentul încovoietor radial şi *Q* forța tăietoare, pe unitatea de lungime, iar *q* sarcina exterioară, pe unitatea de suprafață.

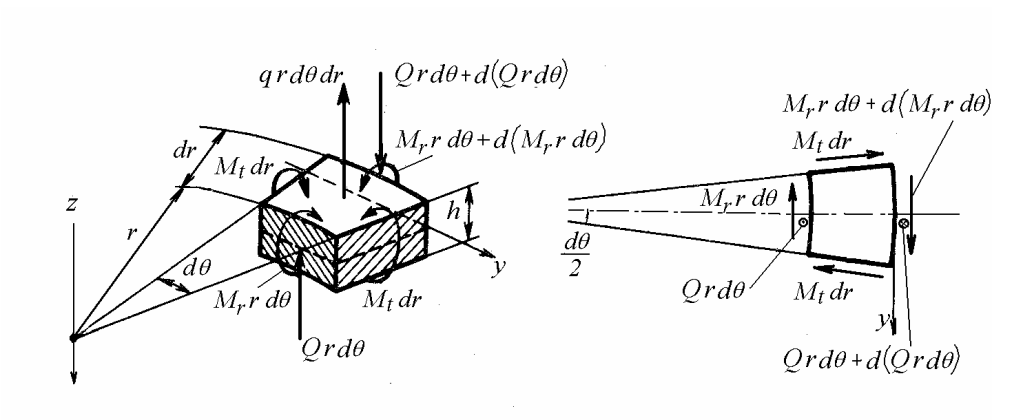


Fig. 7.4

O forță tăietoare pozitivă acționează pe o față pozitivă în sensul pozitiv al axei *z*. Momentul M_r şi forța *Q* variază cu raza *r*.

Ecuația de proiecții a forțelor pe verticală este

$$Q\,r\,\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}\left(Q\,r\,\mathrm{d}\theta\right)-Q\,r\,\mathrm{d}\theta=q\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,,$$

care se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}\left(Q\,r\right)}{\mathrm{d}\,r}=q\,r\,. \tag{7.16}$$

Ecuația de momente față de tangenta *y* la cercul exterior este

$$M_r\,r\,\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}\left(M_r\,r\,\mathrm{d}\theta\right)-M_r\,r\,\mathrm{d}\theta-2M_t\,\mathrm{d}\,r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-Q\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r=q\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\frac{\mathrm{d}r}{2}\,.$$

Neglijând termenul din membrul drept, care este un infinit mic de ordin superior, după simplificări se obține

$$\frac{\mathrm{d}\left(M_r\,r\right)}{\mathrm{d}\,r}-M_t=Q\,r\,. \tag{7.17}$$

Ecuațiile (7.12), (7.16) şi (7.17) formează un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute *Q*, M_r, M_t şi φ.

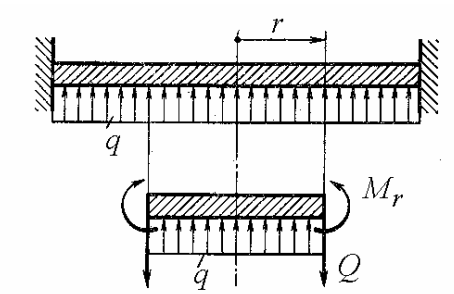


Fig. 7.5

Forța tăietoare distribuită *Q* se obține integrând ecuația (7.16)

$$Q=\frac{1}{r}\int_0^r q\,r\,\mathrm{d}r\,. \tag{7.18}$$

Ea poate fi determinată direct dacă se scrie echilibrul unui disc de rază *r* decupat din placă (fig. 7.5). Pentru o placă încărcată cu sarcină uniform distribuită, ecuația de echilibru a forțelor se scrie

$$q\pi r^2-Q\,2\pi\,r=0\,,$$

$$Q=\frac{q\,r}{2}\,. \tag{7.19}$$

În general

$$Q = \frac{P}{2\pi r}, \tag{7.20}$$

unde P este forța totală aplicată în perimetrul $2\pi r$.

7.2.6 Ecuația înclinării normalei

Înlocuind momentele (7.12) în relația (7.17), se obține ecuația înclinării normalei în funcție de forța tăietoare

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}\varphi = \frac{Q}{D}, \tag{7.21}$$

care se mai scrie sub forma mai uşor integrabilă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\varphi r)\right] = \frac{Q}{D}. \tag{7.22}$$

Soluția generală a ecuației (7.22) este

$$\varphi(r) = Ar + \frac{B}{r} + \frac{1}{Dr}\int\left(\hat{r}\int Q\,\mathrm{d}\tilde{r}\right)\mathrm{d}\hat{r}\ . \tag{7.23}$$

Al treilea termen din membrul drept depinde de încărcarea plăcii. Dacă în cercul de perimetru $2\pi r$ acționează o sarcină uniform distribuită q şi o forță concentrată F, ambele dirijate în sus, atunci

$$Q = \frac{F}{2\pi r} + \frac{qr}{2}. \tag{7.24}$$

Se calculează

$$\int Q\,\mathrm{d}r = \int\left(\frac{F}{2\pi r} + \frac{qr}{2}\right)\mathrm{d}r = \frac{F}{2\pi}\ln r + \frac{qr^2}{4} + 2C_1,$$

$$\int r\left(\frac{F}{2\pi}\ln r + \frac{qr^2}{4} + C_1^*\right)\mathrm{d}r = \frac{F}{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right) + \frac{qr4}{16} + C_1 r^2 + C_2,$$

deci în (7.23) termenul al treilea $I = \frac{1}{Dr}\int\left(\hat{r}\int Q\,\mathrm{d}\tilde{r}\right)\mathrm{d}\hat{r}$ devine

$$I = \frac{Fr}{8\pi D}\left(2\ln r - 1\right) + \frac{qr3}{16D} + \frac{C_1}{D}r + \frac{C_2}{D}\frac{1}{r}.$$

Ultimii doi termeni se adună cu primii doi termeni din membrul drept al relației (7.23) şi se obține expresia înclinării normalei sub forma

$$\varphi = \frac{F\,r}{8\pi D}\left(2\ln r - 1\right) + \frac{q\,r^3}{16D} + A'\,r + \frac{B'}{r}\,. \tag{7.25}$$

Înlocuind (7.1) în relația (7.21) se obține ecuația săgeții plăcii

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}\,r^3} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\,r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q}{D}\,, \tag{7.26}$$

care se mai scrie sub forma mai uşor integrabilă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right] = -\frac{Q}{D}\,. \tag{7.27}$$

7.2.7 Condițiile la limită

Constantele de integrare A şi B (A' şi B') se determină din condițiile de încărcare şi de rezemare, pe contur sau la interior (dacă este cazul):

- Pe o margine încastrată, $w = 0$ şi $\varphi = 0$.

- Pe o margine simplu rezemată $w = 0$.

- Pe o margine simplu rezemată sau liberă, tensiunile radiale σ_r şi momentele radiale M_r produse de sarcini exterioare sunt nule, deci

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\,r} + \nu\,\frac{\varphi}{r}\right)_{r=R} = \frac{M_T}{D}\,, \tag{7.28}$$

unde R este raza marginii respective.

La placa plină încărcată axial-simetric, la $r = 0$ unghiul $\varphi = 0$, deci $B = 0$.

7.2.8 Plăci cu tensiuni de membrană

În studiul încovoierii plăcilor s-au neglijat tensiunile termice produse de extinderea planului median (tensiunile de membrană). În continuare, pentru considerarea acestora, se va utiliza metoda lui Duhamel.

Fie o placă de grosime constantă *h*, în care temperatura *T* variază numai pe grosime. Deformația specifică totală este egală cu suma deformației specifice termice şi a deformației specifice produse de tensiuni.

Deformațiile specifice produse de tensiuni pot fi scrise

$$\begin{aligned} \varepsilon_r' &= \varepsilon_r - \alpha T, \\ \varepsilon_t' &= \varepsilon_t - \alpha T. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Se presupune că dilatarea termică radială a plăcii este complet blocată aplicând tensiuni radiale de compresiune. Din relațiile (7.29) rezultă

$$\varepsilon_r' = \varepsilon_t' = -\alpha T \tag{7.30}$$

iar din legea lui Hooke se obține

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r' + \nu\varepsilon_t'\right) = -\frac{E\alpha T}{1-\nu}. \tag{7.31}$$

Relația (7.31) exprimă tensiunile care trebuie aplicate plăcii pentru a elimina dilatarea termică radială.

Tensiunile termice în placa liberă, fără acțiuni radiale exterioare, se obțin suprapunând peste tensiunile date de (7.31) tensiuni radiale egale şi de sens contrar produse de eforturi aplicate la marginea plăcii. Aceste tensiuni au o forță rezultantă (pe unitatea de lungime)

$$N_T = \frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} T\,\mathrm{d}z \tag{7.32}$$

şi un moment rezultant (pe unitatea de lungime) (7.14)

$$M_T = \frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} T\,z\,\mathrm{d}z\,. \tag{7.33}$$

La o distanță suficientă de marginea plăcii, eforturile aplicate vor produce tensiuni de membrană uniform distribuite, de mărime

$$\frac{N_T}{h} = \frac{1}{h}\frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} T\,\mathrm{d}z \tag{7.34}$$

şi tensiuni de încovoiere distribuite liniar, de mărime

$$\frac{M_T\,z}{h^3/12} = \frac{12}{h^3}\,z\,\frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} T\,z\,\mathrm{d}z\,. \tag{7.35}$$

Ca urmare, tensiunile termice radiale în placa cu marginile libere vor fi

$$\sigma_{r_T} = -\frac{E\alpha T}{1-\nu} + \frac{1}{h}\frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} T\,\mathrm{d}z + \frac{12}{h^3}z\frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} T z\,\mathrm{d}z \qquad (7.36)$$

sau

$$\sigma_{r_T} = -\frac{E\alpha T}{1-\nu} + \frac{N_T}{h} + \frac{M_T z}{h^3/12}. \qquad (7.37)$$

7.2.9 Plăci circulare pline

Se consideră o placă de grosime constantă *h*, cu raza *b*, într-un câmp termic staționar, în care temperatura variază doar pe grosimea plăcii.

7.2.9.1 Placa liberă

În lipsa sarcinilor exterioare, relația (7.23) se reduce la

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r}. \qquad (7.38)$$

În centrul plăcii, la $r = 0$ unghiul $\varphi = 0$, deci $B = 0$ și

$$\varphi = Ar\ , \qquad (7.39)$$

deci curbura rezultată din încălzirea neuniformă a plăcii este

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = A = const. \qquad (7.40)$$

Suprafața mediană deformată a plăcii este o suprafață sferică.

Din (7.2) se obține expresia săgeții

$$w = -\int_0^r \varphi\,\mathrm{d}r + C = -A\int_0^r r\,\mathrm{d}r + C = -\frac{A}{2}r^2 + C. \qquad (7.41)$$

Dacă originea axelor se alege în centrul plăcii, la $r = 0$, $w = 0$ (fig. 7.6), rezultă $C = 0$, deci

$$w = -A\frac{r^2}{2}. \qquad (7.42)$$

Deoarece

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}+\nu\frac{\varphi}{r}\right)_{r=b}=\frac{M_T}{D}, \tag{7.43}$$

înlocuind (7.39) în (7.43) se obține constanta de integrare

$$A=\frac{M_T}{D(1+\nu)}. \tag{7.44}$$

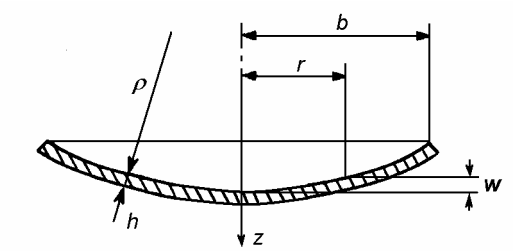


Fig. 7.6

Săgeata plăcii libere pe contur este

$$w=-\frac{r^2}{2}\frac{M_T}{D(1+\nu)}. \tag{7.45}$$

Curbura suprafeței mediane este

$$\frac{1}{\rho_r}=\frac{12}{h^3}\alpha\int_{-h/2}^{h/2}T\,z\,\mathrm{d}z. \tag{7.46}$$

În cazul unei distribuții liniare a temperaturii pe grosimea plăcii, de forma

$$T=T_0\frac{z}{h}, \tag{7.47}$$

integralele

$$\int_{-h/2}^{h/2}T\,z\,\mathrm{d}z=T_0\frac{h^2}{12}, \qquad \int_{-h/2}^{h/2}T\,\mathrm{d}z=0, \tag{7.48}$$

deci tensiunile de membrană sunt nule, iar curbura (7.46) are expresia

$$\frac{1}{\rho_r}=\alpha\frac{T_0}{h}. \tag{7.49}$$

Tensiunile termice în placa liberă sunt nule

$$\sigma_{r_T} = -\frac{E\alpha}{1-\nu} T_0 \frac{z}{h} + \frac{12}{h^3} z \frac{E\alpha}{1-\nu} T_0 \frac{h^2}{12} = 0, \qquad \sigma_{t_T} = 0. \tag{7.50}$$

7.2.9.2 Placa încastrată pe contur

Se presupune că marginea plăcii este astfel rigidizată încât nu se poate roti, dar planul median se poate extinde liber (încastrare alunecătoare). În acest caz, încălzirea neuniformă produce un moment încovoietor uniform distribuit de-a lungul conturului plăcii.

Înclinarea normalei este (7.39)

$$\varphi = Ar \ . \tag{7.51}$$

În încastrare, la $r = b$, $\varphi = 0$, rezultă $A = 0$, deci placa rămâne nedeformată şi săgeata este nulă.

Momentul distribuit din încastrare trebuie să anuleze curbura (7.49) produsă de încălzirea neuniformă a plăcii libere

$$\frac{M}{D(1+\nu)} = \frac{12}{h^3} \alpha \int_{-h/2}^{h/2} T z \, dz, \tag{7.52}$$

deci

$$M = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} T z \, dz, \tag{7.53}$$

valoare evident egală cu M_T (7.33).

Tensiunile corespunzătoare din placă sunt

$$\sigma_{r_T} = \frac{12}{h^3} z \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} T z \, dz. \tag{7.54}$$

În cazul unei distribuții liniare a temperaturii pe grosimea plăcii, de forma (7.47) curbura are expresia (7.49).

Tensiunile termice în placa încastrată pe contur sunt distribuite liniar pe grosime

$$\sigma_{r_T} = \sigma_{t_T} = \frac{E\alpha}{1-\nu} T_0 \frac{z}{h}. \tag{7.55}$$

Tensiunile maxime, la $z = \pm h/2$, sunt

$$\sigma_{r\max} = \sigma_{t\max} = \pm \frac{E\alpha T_0}{2(1-\nu)} \tag{7.56}$$

şi valoarea lor aparent nu depinde de grosimea plăcii *h*. Totuşi acesta influenţează diferenţa de temperatură T_0 care creşte deobicei proporţional cu grosimea plăcii. Rezultă că la plăci groase pot apare tensiuni termice mai mari decât la plăci subţiri.

7.2.10 Plăci inelare

Se consideră o placă de grosime constantă *h*, cu raza interioară *a* şi raza exterioară *b*, într-un câmp termic staţionar, în care temperatura variază doar pe grosimea plăcii.

7.2.10.1 Placa liberă

În lipsa sarcinilor exterioare, relaţia (7.23) se reduce la

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r}. \tag{7.57}$$

Deoarece

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\varphi}{r}\right)_{r=a} = \frac{M_T}{D}, \tag{7.58}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\varphi}{r}\right)_{r=b} = \frac{M_T}{D}, \tag{7.59}$$

înlocuind (7.57) în (7.58) şi (7.59) se obţin constantele de integrare

$$A = \frac{M_T}{D(1+\nu)}, \qquad B = 0, \tag{7.60}$$

$$\varphi = Ar = \frac{M_T}{D(1+\nu)}r, \tag{7.61}$$

suprafaţa deformată este sferică.

Din (7.2) se obţine expresia săgeţii

$$w = -\int_a^r \varphi\,\mathrm{d}r + C = -A\int_a^r r\,\mathrm{d}r + C = -\frac{A}{2}\left(r^2 - a^2\right) + C. \tag{7.62}$$

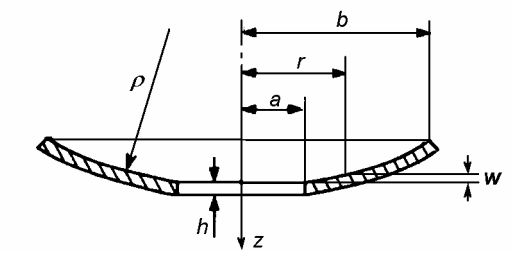


Fig. 7.7

Dacă originea axelor se alege astfel încât la $r = a$, $w = 0$ (fig. 7.7), rezultă $C = 0$, deci

$$w = -\frac{1}{2}\left(r^2 - a^2\right)\frac{M_T}{D\left(1+\nu\right)}. \tag{7.63}$$

În cazul unei distribuții liniare a temperaturii pe grosimea plăcii, de forma (7.47) tensiunile termice în placa liberă sunt nule (7.50).

7.2.10.2 Placa simplu rezemată la exterior şi liberă la interior

În placa simplu rezemată la exterior (fig. 7.8) la care planul median se poate extinde liber, suprafața deformată este sferică şi tensiunile termice sunt nule. Săgeata, măsurată față de conturul exterior, este

$$w = -\frac{1}{2}\left(r^2 - b^2\right)\frac{M_T}{D\left(1+\nu\right)}. \tag{7.64}$$

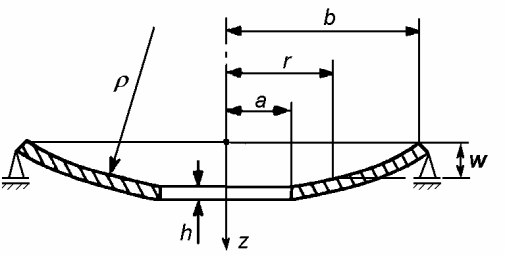


Fig. 7.8

7.2.10.3 Placa simplu rezemată la interior şi liberă la exterior

În placa simplu rezemată la interior (fig. 7.9) la care planul median se poate extinde liber, suprafața deformată este sferică şi tensiunile termice sunt nule. Săgeata, măsurată față de conturul interior, este aceeaşi ca la placa liberă

$$w = -\frac{1}{2}\left(r^2 - a^2\right)\frac{M_T}{D(1+\nu)}. \qquad (7.65)$$

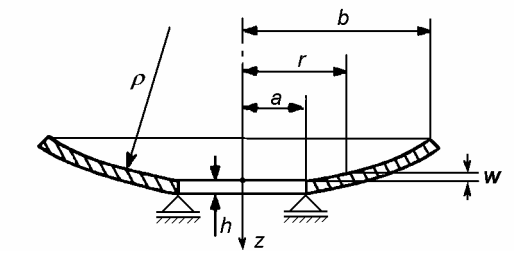


Fig. 7.9

7.2.10.4 Placa încastrată la interior şi liberă la exterior

La o placă de grosime constantă, încastrată pe conturul interior şi liberă pe conturul exterior (fig. 7.10 în care se neglijează dilatarea arborelui), supusă unui câmp staționar de *temperatură cu variație doar pe grosimea plăcii*, se calculează separat tensiunile termice produse de încovoiere şi tensiunile de membrană.

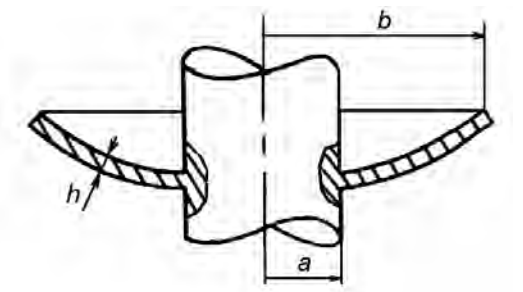


Fig. 7.10

Tensiunile de membrană, uniform distribuite pe grosimea plăcii, sunt date de relațiile (5.85) şi (5.86) fără efecte termice.

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită. Pentru o placă cu conturul interior radial blocat şi conturul exterior radial liber

$$\text{la } r = a\,,\ \ \varepsilon_t = 0 \ \text{ şi la } r = b\,,\ \ \sigma_r = 0\,. \qquad (7.66)$$

Rezultă

$$\left(1-\nu\right)C_1 + \left(1+\nu\right)\frac{C_2}{a^2} + E\alpha T = 0\,, \qquad C_1 - \frac{C_2}{b^2} = 0\,, \qquad (7.67)$$

Eliminând C_2 rezultă

$$C_1 = \frac{-E\alpha T}{(1+\nu)\dfrac{b^2}{a^2}+(1-\nu)},$$

deci tensiunile termice de membrană sunt

$$\sigma_r = \frac{N_T}{h}\,\frac{\dfrac{b^2}{r^2}-1}{\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{b^2}{a^2}+1}, \tag{7.68}$$

$$\sigma_t = -\frac{N_T}{h}\,\frac{\dfrac{b^2}{r^2}+1}{\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{b^2}{a^2}+1}. \tag{7.69}$$

Tensiunile de încovoiere, distribuite liniar pe grosimea plăcii, se calculează pornind de la ecuația înclinării normalei (7.57)

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r}.$$

Constantele de integrare se determină din condițiile la limită

la $r=a$, $\varphi=0$ şi la $r=b$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}+\nu\dfrac{\varphi}{r}\right)_{r=b} = \dfrac{M_T}{D}$. (7.70)

Rezultă

$$A = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{M_T/D}{(1+\nu)\dfrac{b^2}{a^2}+1-\nu}, \tag{7.71}$$

$$B = -b^2\,\frac{M_T/D}{(1+\nu)\dfrac{b^2}{a^2}+1-\nu}. \tag{7.72}$$

Înlocuind (7.57) în (7.12) fără efecte termice

$$\frac{M_r}{D} = (1+\nu)\,A - (1-\nu)\frac{B}{r^2},$$

$$\frac{M_t}{D} = (1+\nu)\,A + (1-\nu)\frac{B}{r^2},$$

apoi înlocuind (7.71) şi (7.72) se obține

$$M_r = M_T \frac{b^2}{r^2} \frac{(1+\nu)\frac{r^2}{a^2} + (1-\nu)}{(1+\nu)\frac{b^2}{a^2} + (1-\nu)}\ , \tag{7.73}$$

$$M_t = M_T \frac{b^2}{r^2} \frac{(1+\nu)\frac{r^2}{a^2} - (1-\nu)}{(1+\nu)\frac{b^2}{a^2} + (1-\nu)}\ . \tag{7.74}$$

Tensiunile termice se obțin din (7.15). Ele au valori extreme la suprafața plăcii, pentru $z = \pm h/2$.

7.2.10.5 Placa încastrată la exterior şi liberă la interior

La placa încastrată pe conturul exterior şi liberă pe conturul interior (fig. 7.11 în care se neglijează dilatarea încastrării), pentru calculul tensiunilor de membrană, constantele de integrare se determină din condițiile la limită

$$\text{la } r = b,\ \ \varepsilon_t = 0 \ \text{ şi la } r = a,\ \ \sigma_r = 0\,. \tag{7.75}$$

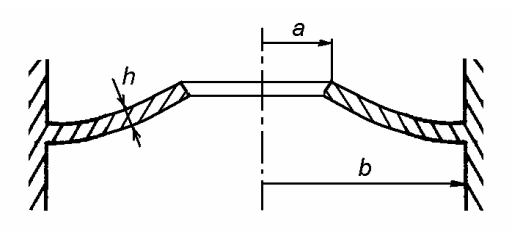


Fig. 7.11

Rezultă

$$\sigma_r = \frac{N_T}{h} \frac{\frac{a^2}{r^2} - 1}{\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{b^2}{a^2} + 1}, \tag{7.76}$$

$$\sigma_r = -\frac{N_T}{h} \frac{\frac{a^2}{r^2} + 1}{\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{b^2}{a^2} + 1}\,. \tag{7.77}$$

Pentru calculul tensiunilor de încovoiere, constantele de integrare se determină din condițiile la limită

la $r=b$, $\varphi=0$ şi la $r=a$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}+\nu\dfrac{\varphi}{r}\right)_{r=a}=\dfrac{M_T}{D}$. (7.78)

Rezultă

$$M_r=M_T\,\frac{a^2}{r^2}\,\frac{(1+\nu)\,\dfrac{r^2}{a^2}+(1-\nu)\,\dfrac{b^2}{a^2}}{(1+\nu)+(1-\nu)\,\dfrac{b^2}{a^2}}\,, \tag{7.79}$$

$$M_t=M_T\,\frac{a^2}{r^2}\,\frac{(1+\nu)\,\dfrac{r^2}{a^2}-(1-\nu)\,\dfrac{b^2}{a^2}}{(1+\nu)+(1-\nu)\,\dfrac{b^2}{a^2}}\,, \tag{7.80}$$

apoi tensiunile se obțin din (7.15)

7.2.11 Plăci nesolicitate termic

Formulele tensiunilor termice în plăci de grosime constantă au fost stabilite considerând că sarcinile exterioare sunt nule.

În cazul plăcilor solicitate simultan de sarcini exterioare şi câmpuri termice, tensiunile totale se pot calcula aplicând principiul suprapunerii efectelor, adunând la tensiunile termice cele produse de alte solicitări. În acest scop, în continuare se prezintă relațiile de calcul al tensiunilor produse în plăci încărcate cu sarcină uniform distribuită şi cu forță concentrată la mijloc.

7.2.11.1 Placa încastrată pe contur, încărcată cu sarcină uniform distribuită

La placa din figura 7.12, *a* sarcina distribuită este aplicată în jos, deci relația (7.25) devine

$$\varphi=A'r+\frac{B'}{r}-\frac{p\,r^3}{16\,D}\,.$$

În centru, la $r=0$, $\varphi=0$, deci $B'=0$.

Pe contur, la $r=R$, $\varphi=0$, deci $A'=\dfrac{p\,R^2}{16\,D}$.

Rezultă

$$\varphi=\frac{p\,r}{16\,D}\left(R^2-r^2\right). \tag{7.81}$$

Se calculează

$$\frac{\varphi}{r}=\frac{p}{16D}\left(R^2-r^2\right),\qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=\frac{p}{16D}\left(R^2-3r^2\right).$$

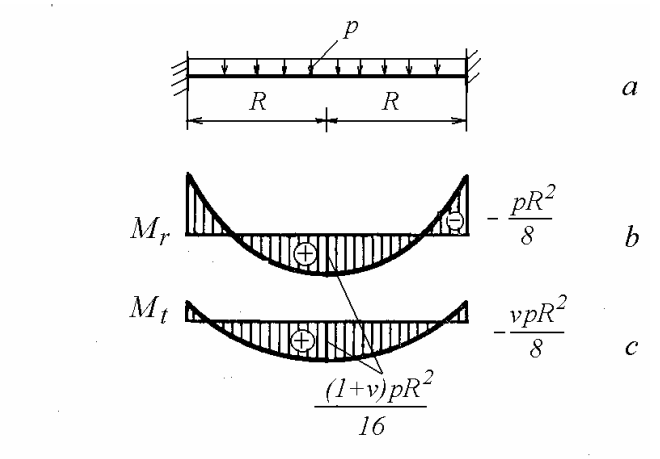


Fig. 7.12

Din relațiile (7.12) fără efecte termice

$$\begin{aligned} M_r &= D\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}+\nu\frac{\varphi}{r}\right),\\ M_t &= D\left(\frac{\varphi}{r}+\nu\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right), \end{aligned} \tag{7.82}$$

se deduc expresiile momentelor încovoietoare

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{p}{16}\left[\left(1+\nu\right)R^2-\left(3+\nu\right)r^2\right],\\ M_t &= \frac{p}{16}\left[\left(1+\nu\right)R^2-\left(1+3\nu\right)r^2\right]. \end{aligned} \tag{7.83}$$

Pentru o placă din oțel, înlocuind $\nu=0{,}3$ în relațiile de mai sus, se obține

$$M_r=\frac{p}{16}\left(1{,}3R^2-3{,}3r^2\right),$$
$$M_r=\frac{p}{16}\left(1{,}3R^2-1{,}9r^2\right).$$

În figurile 7.12, *b* şi *c* se prezintă diagramele de variație ale momentelor încovoietoare în lungul razei plăcii.

Tensiunile normale din placă, la suprafață, au expresiile

$$\sigma_r = \pm \frac{6p}{16h^2}\left(1{,}3R^2 - 3{,}3r^2\right),$$

$$\sigma_t = \pm \frac{6p}{16h^2}\left(1{,}3R^2 - 1{,}9r^2\right).$$

Valoarea cea mai mare o au tensiunile radiale pe contur

$$\sigma_{r_{max}} = \frac{3pR^2}{4h^2}.$$

Înlocuind (7.81) în (7.2) se obține ecuația săgeții

$$w = -\int \left[\frac{pr}{16D}\left(R^2 - r^2\right)\right]\mathrm{d}r + C = -\frac{p}{16D}\left(R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right) + C.$$

Constanta *C* se obține din condiția ca la $r = R$, $w = 0$. Rezultă $C = \frac{pR^4}{64D}$.

Ecuația săgeții devine

$$w = \frac{p}{64D}\left(R^2 - r^2\right)^2. \qquad (7.84)$$

Săgeata maximă apare în centrul plăcii unde, pentru $r = 0$, se obține

$$w_{max} = \frac{pR^4}{64D}.$$

7.2.11.2 Placa simplu rezemată pe contur, încărcată cu sarcină uniform distribuită

La placa din figura 7.13, *a* ecuația înclinării normalei este

$$\varphi = A'r + \frac{B'}{r} - \frac{pr^3}{16D},$$

în care $B' = 0$, deoarece în centru, la $r = 0$, $\varphi = 0$.

Pe contur, la $r = R$, $M_r = 0$, deci $A' = \frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{pR^2}{16D}$.

Rezultă

$$\varphi = \frac{p\,r}{16\,D}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}R^2 - r^2\right). \tag{7.85}$$

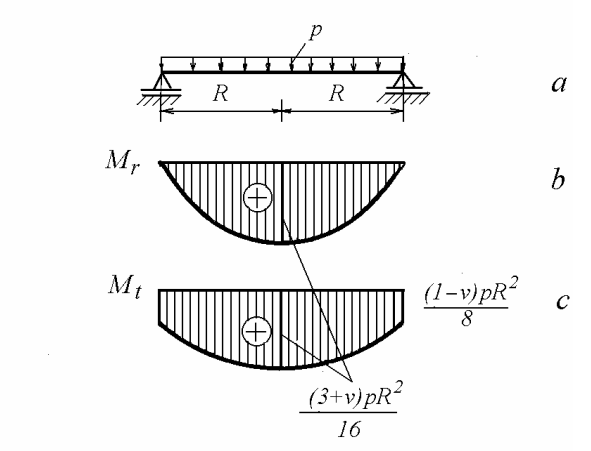


Fig. 7.13

Din relațiile (7.82) se deduc expresiile momentelor încovoietoare distribuite

$$M_r = \frac{p}{16}\,(3+\nu)\left(R^2 - r^2\right), \tag{7.86}$$

$$M_t = \frac{p}{16}\left[(3+\nu)\,R^2 - (1+3\nu)r^2\right]. \tag{7.87}$$

Momentul încovoietor maxim apare în centrul plăcii unde

$$M_r = M_t = \frac{pR^2}{16}(3+\nu).$$

Diagramele momentelor sunt prezentate în figurile 7.13, *b* şi *c*.

Tensiunea maximă apare în centru şi are valoarea

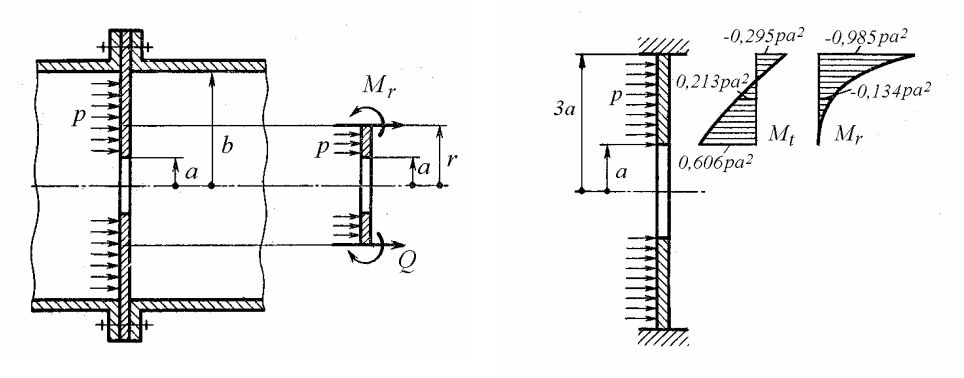
$$\sigma_{r_{\max}} = \frac{3}{8}\frac{pR^2}{h^2}(3+\nu).$$

Săgeata maximă în centrul plăcii este

$$w_{max} = \frac{pR^4}{64\,D}\frac{5+\nu}{1+\nu}.$$

7.2.11.3 Placa inelară solicitată cu sarcină uniform distribuită

Se consideră o diafragmă din oțel utilizată la măsurarea debitului fluidelor (fig. 7.14, *a*), modelată ca placă încastrată pe contur. Pentru simplificarea calculelor se consideră $b = 3a$ (Boiarşinov, 1973).



a *b*

Fig. 7.14

Detaşând un inel cu raza interioară *a* şi raza exterioară *r*, din echilibrul forţelor se calculează forța tăietoare

$$Q = -\frac{p\left(r^2 - a^2\right)}{2r},$$

care se înlocuieşte în relația (7.23).

Se obține

$$\varphi = A' r + \frac{B'}{r} - \frac{p}{16D}\left(\frac{r^4 - a^4}{r} - 4a^2 r \ln\frac{r}{a}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = A' - \frac{B'}{r^2} - \frac{p}{16D}\left(3r^2 + \frac{a^4}{r^2} - 4a^2 - 4a^2 \ln\frac{r}{a}\right).$$

Constantele A' şi B' se determină din condițiile la limită. La $r = a$, $M_r = 0$, deci $\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\varphi}{r}\right)_{r=a} = 0$, şi la $r = b$, $\varphi = 0$.

Rezultă sistemul de ecuații

$$A'\left(1+\nu\right) - B'\frac{1-\nu}{a^2} = 0,$$

$$A'b+\frac{B'}{b}-\frac{p}{16D}\left(\frac{b^4-a^4}{b}-4a^2b\ln\frac{b}{a}\right)=0.$$

Înlocuind $b=3a$ şi $\nu=0{,}3$ pentru oțel, se obține

$$A'=0{,}233\frac{pa^2}{D},\qquad B'=0{,}433\frac{pa^4}{D}.$$

Rezultă

$$\varphi=\frac{pa^2r}{D}\left(0{,}233+0{,}495\frac{a^2}{r^2}-0{,}0625\frac{r^2}{a^2}+0{,}25\ln\frac{r}{a}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=\frac{pa^2}{D}\left(0{,}483-0{,}495\frac{a^2}{r^2}-0{,}1875\frac{r^2}{a^2}+0{,}25\ln\frac{r}{a}\right).$$

Din relațiile (7.82) se obțin apoi expresiile momentelor încovoietoare, ale căror diagrame sunt prezentate în figura 7.14, *b*, pentru cazul particular considerat.

Săgeata maximă este

$$w_{max}=0{,}962\frac{pa^4}{D}.$$

7.2.11.4 Placa încastrată pe contur, încărcată cu o forță în mijloc

La placa din figura 7.15, *a* încărcată în centru cu o forță *F* dirijată în jos, ecuația (7.25) devine

$$\varphi=A'r+\frac{B'}{r}-\frac{Fr}{8\pi D}(2\ln r-1),$$

în care $B'=0$, deoarece în centru, la $r=0$, $\varphi=0$ şi $(r\ln r)_{r=0}=0$.

Pe contur, la $r=R$, $\varphi=0$, deci $A'=\frac{F}{8\pi D}(2\ln R-1)$.

Rezultă ecuația înclinării normalei

$$\varphi=\frac{Fr}{4\pi D}\ln\frac{R}{r}. \tag{7.88}$$

Momentele încovoietoare distribuite sunt

$$M_r=\frac{F}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{R}{r}-1\right], \tag{7.89}$$

$$M_t = \frac{F}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{R}{r} - \nu \right]. \qquad (7.90)$$

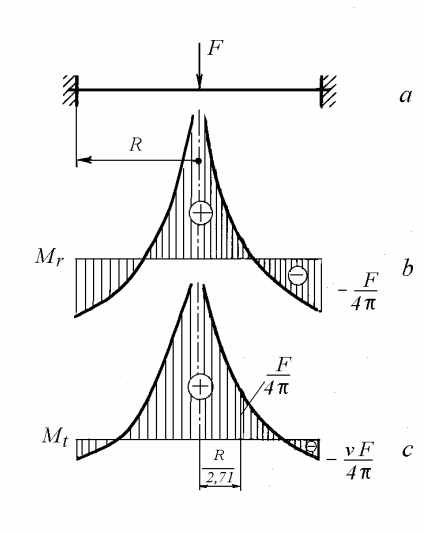


Fig. 7.15

În centru, la $r = 0$, $M_r \to \infty$. Pe contur, la $r = R$, momentele sunt

$$M_r = -\frac{F}{4\pi}\ ,\ M_t = -\frac{F\nu}{4\pi} = \nu M_r .$$

Diagramele momentelor încovoietoare distribuite sunt prezentate în figurile 7.15, *b* şi *c*.

Tensiunile maxime pe conturul plăcii au expresiile

$$\sigma_{r_{\max}} = \frac{3F}{2\pi h^2}, \qquad \sigma_{t_{\max}} = \frac{3F\nu}{2\pi h^2} = \nu\sigma_{r_{\max}} .$$

Ecuația săgeții este

$$w = \frac{F r^2}{8\pi D}\ln\frac{r}{R} + \frac{F}{16\pi D}\left(R^2 - r^2\right) \qquad (7.91)$$

iar în centrul plăcii, săgeata maximă are valoarea

$$w_{max} = \frac{F R^2}{16\pi D}.$$

7.2.11.5 Placa simplu rezemată pe contur, încărcată cu o forță în mijloc

La placa simplu rezemată pe contur, ecuația înclinării normalei este

$$\varphi = A' r + \frac{B'}{r} - \frac{F r}{8\pi D}\left(2\ln r - 1\right),$$

în care $B' = 0$, deoarece în centru, la $r = 0$, $\varphi = 0$ şi $\left(r \ln r\right)_{r=0} = 0$.

Pe contur, la $r = R$, $M_r = 0$, deci

$$A' = \frac{F}{4\pi D}\left(2\ln R + \frac{1-\nu}{1+\nu}\right).$$

Rezultă ecuația înclinării normalei

$$\varphi = \frac{F r}{4\pi D}\left(\ln\frac{R}{r} + \frac{1}{1+\nu}\right). \tag{7.92}$$

Momentele încovoietoare au expresiile

$$M_r = \frac{F}{4\pi}\left(1+\nu\right)\ln\frac{R}{r}, \tag{7.93}$$

$$M_t = \frac{F}{4\pi}\left[\left(1+\nu\right)\ln\frac{R}{r} + 1 - \nu\right], \tag{7.94}$$

având valori infinite în centrul plăcii.

Față de cazul precedent, pe contur momentele încovoietoare nu mai sunt negative. Momentul radial este nul iar momentul circumferențial este pozitiv, ca şi în restul plăcii.

În realitate, forța concentrată nu se aplică chiar într-un punct, ci pe o suprafață finită, caz în care momentele încovoietoare din centrul plăcii au valori finite.

Ecuația săgeții este

$$w = \frac{F r^2}{8\pi D}\ln\frac{r}{R} + \frac{F}{16\pi D}\frac{3+\nu}{1+\nu}\left(R^2 - r^2\right) \tag{7.95}$$

iar în centrul plăcii, săgeata maximă are valoarea

$$w_{max} = \frac{F R^2}{16\pi D}\frac{3+\nu}{1+\nu}.$$

Plăci cu alte condiții de rezemare şi încărcare sunt tratate în (Roark, 1954) şi (Ponomariov, 1964).

7.3 Încovoierea plăcilor dreptunghiulare

Calculul plăcilor dreptunghiulare este mai complicat decât cel al plăcilor circulare deoarece implică două variabile independente şi ca urmare ecuațiile diferențiale de echilibru conțin derivate parțiale. Se adoptă ipotezele nemodificării normalei şi independenței acțiunii straturilor, şi se consideră că săgețile plăcii sunt mici în comparație cu grosimea. În continuare se analizează doar plăci de grosime constantă şi, pentru simplificare, se neglijează efectele de membrană, adică eforturile de întindere/compresiune din planul median. Se stabilesc ecuațiile generale, apoi se tratează doar cazul plăcii simplu rezemate pe contur, pentru a exemplifica complexitatea soluției analitice.

7.3.1 Geometria suprafeței mediane

Placa de grosime *h* se raportează la un sistem cartezian de coordonate (fig.7.16) cu axele *x* şi *y* dispuse în planul median şi axa *z* dirijată în jos.

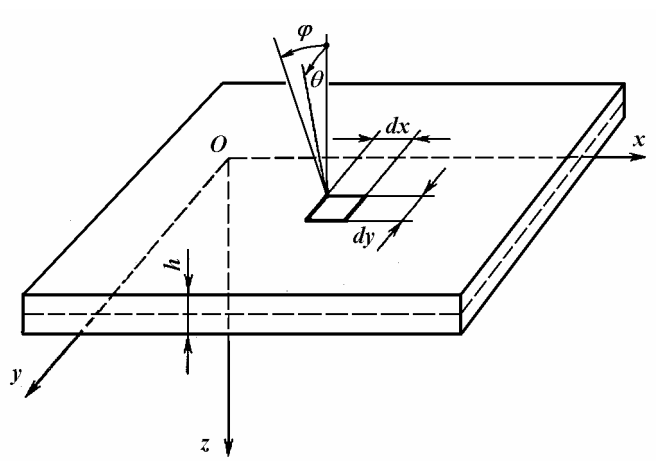


Fig. 7.16

Conform ipotezei de bază, normala la planul median rămâne dreaptă şi perpendiculară pe suprafața mediană deformată a plăcii. Rotirea normalei se definește prin unghiurile φ şi θ, cu sensurile pozitive din figura 7.16.

În figura 7.17, *a* se arată un paralelipiped de laturi *dx*, *dy*, *h* detaşat din placă, pe care s-a marcat suprafața *klmn* la distanța *z* de planul median *abcd*.

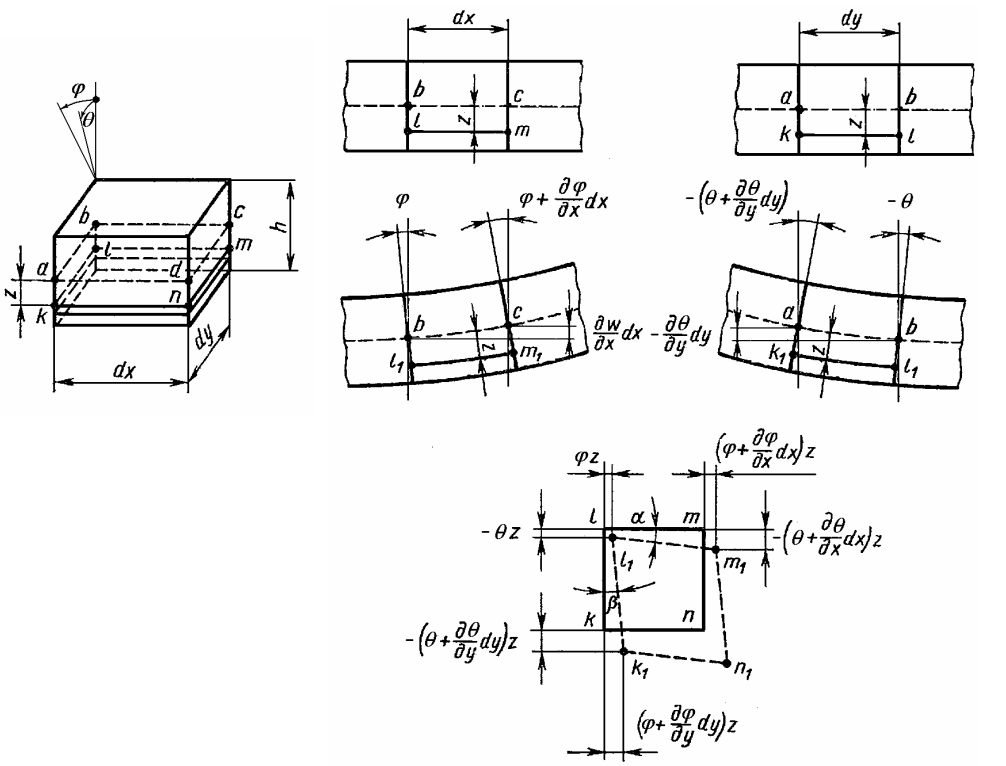


Fig. 7.17

Într-o secțiune $y = const.$, normala se roteşte cu unghiul

$$\varphi = -\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{7.96}$$

iar curbura este

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{7.97}$$

Într-o secțiune $x = const.$, normala se roteşte cu unghiul

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{7.98}$$

iar curbura este

$$\frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{7.99}$$

Răsucirea (torsiunea) suprafeței este

$$\frac{1}{\rho_{xy}} = -\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{7.100}$$

Curburile şi răsucirea suprafeței mediane sunt arătate în figura 7.18.

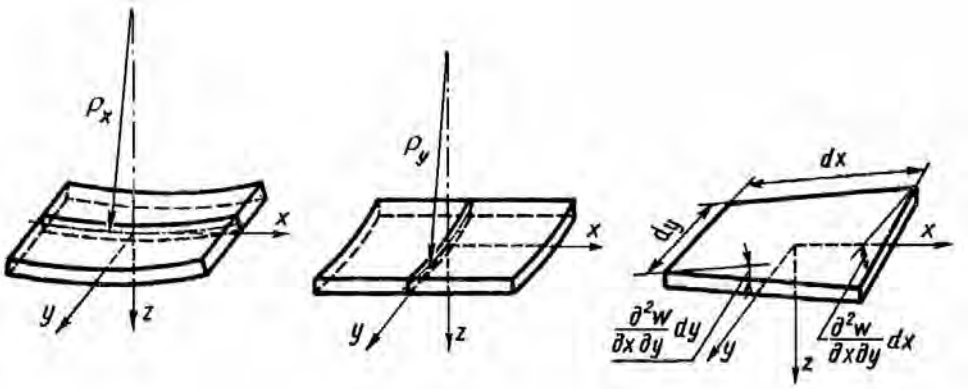


Fig. 7.18

7.3.2 Relațiile între deformații specifice şi deplasări

Deplasările unui punct situat la distanța *z* de suprafața mediană (fig. 7.17) sunt

$$\begin{aligned} u &= \varphi z = -\frac{\partial w}{\partial x} z , \\ v &= -\theta z = -\frac{\partial w}{\partial y} z , \\ w &= w(x, y). \end{aligned} \tag{7.101}$$

Deformațiile specifice (4.6) au expresiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} z = \frac{z}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z , \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial y} z = \frac{z}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha + \beta = \frac{2z}{\rho_{xy}} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z . \end{aligned} \tag{7.102}$$

7.3.3 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice

Deoarece se presupune că în placă există o stare plană de tensiuni, se utilizează legea lui Hooke cu efecte termice (4.8) sub forma

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) + \alpha T\,,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right) + \alpha T\,, \tag{7.103}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\,,$$

sau, exprimând tensiunile în funcție de deformații specifice,

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\,,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\,, \tag{7.104}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\,\gamma_{xy} = \tau_{yx}\,.$$

Înlocuind alungirile specifice (7.102) în relațiile (7.104) rezultă

$$\sigma_x = \frac{E\,z}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\,,$$

$$\sigma_y = \frac{E\,z}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\,, \tag{7.105}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E\,z}{1+\nu}\,\frac{1}{\rho_{xy}} = \tau_{yx}\,,$$

sau, în funcție de săgeata plăcii,

$$\sigma_x = -\frac{E\,z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\,,$$

$$\sigma_y = -\frac{E\,z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\,, \tag{7.106}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \tau_{yx}\,.$$

În afară de tensiunile σ_x, σ_y şi τ_{xy}, distribuite liniar pe grosimea plăcii, asupra elementului considerat acționează tensiunile tangențiale τ_{xz} şi τ_{yz}, perpendiculare pe suprafața mediană, care au valori nule la $z = \pm h/2$ şi valori maxime în suprafața mediană.

7.3.4 Relațiile de echivalență între eforturi şi tensiuni

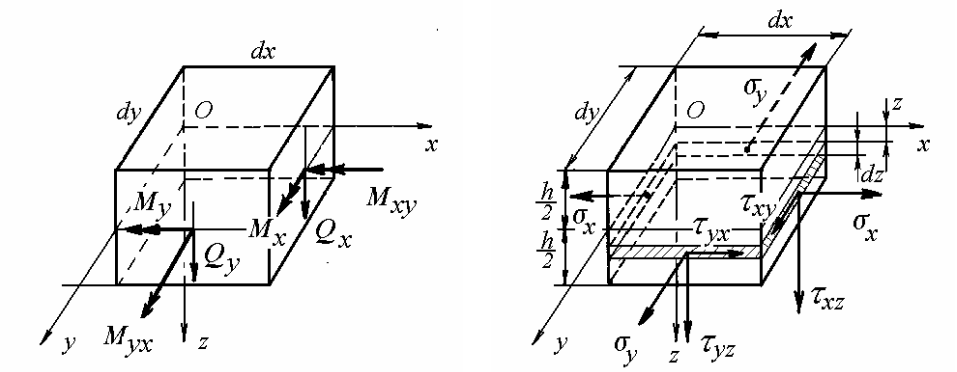
Între eforturile interioare (pe unitatea de lungime) (fig. 7.19, *a*) şi tensiunile din placă (fig. 7.19, *b*) se stabilesc următoarele relații

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_x \mathrm{d}z\,, \qquad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_y\,\mathrm{d}z\,,$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\tau_{xy}\,\mathrm{d}z \qquad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\tau_{yx}\,\mathrm{d}z\,, \tag{7.107}$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}\,\mathrm{d}z\,, \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}\,\mathrm{d}z\,,$$

unde *h* este grosimea plăcii.



a *b*

Fig. 7.19

Înlocuind tensiunile din ecuațiile (7.105) şi (7.106) în relațiile (7.107) şi integrând, se obțin expresiile momentelor distribuite

$$M_x = D\left(\frac{1}{\rho_x}+\frac{\nu}{\rho_y}\right)-M_T = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-M_T,$$

$$M_y = D\left(\frac{1}{\rho_y}+\frac{\nu}{\rho_x}\right)-M_T = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-M_T, \qquad (7.108)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{(1-\nu)D}{\rho_{xy}} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},$$

unde *D* este *rigiditatea la încovoiere* a plăcii (7.13)

$$D = \frac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}, \qquad (7.109)$$

iar M_T este *momentul încovoietor termic echivalent* (7.14)

$$M_T = \frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2} T\,z\,\mathrm{d}z. \qquad (7.110)$$

Din relațiile (7.104) şi (7.107) se obțin relațiile de calcul al tensiunilor normale

$$\sigma_x = \frac{12\,z}{h^3}\left(M_x + M_T\right)-\frac{E\alpha T}{1-\nu},$$
$$\sigma_y = \frac{12\,z}{h^3}\left(M_y + M_T\right)-\frac{E\alpha T}{1-\nu}. \qquad (7.111)$$

Acestea au valori extreme la suprafețele plăcii, pentru $z = \pm h/2$.

Atât momentele cât şi tensiunile normale depind de săgeata w, care se determină din ecuațiile de echilibru şi condițiile la limită.

7.3.5 Ecuațiile de echilibru

Ca şi la bare, în teoria inginerească a plăcilor, deoarece *se impun* anumite deformații (normala rectilinie), ecuațiile de echilibru sunt exprimate şi satisfăcute doar în funcție de eforturi şi nu local, în funcție de tensiuni.

Se consideră un element de laturi *dx* şi *dy* detaşat din placa solicitată la încovoiere. În figura 7.20 se arată forțele şi momentele care acționează asupra acestui element (fără efecte de membrană) şi sarcina exterioară *p* (dirijată în jos).

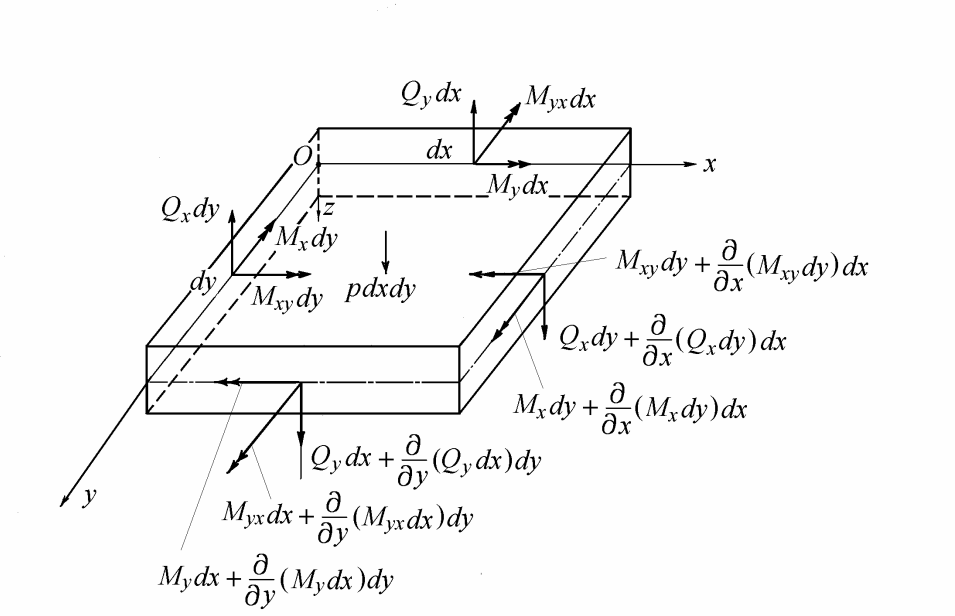


Fig. 7.20

Ecuația de proiecții a forțelor pe verticală este

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0\,. \tag{7.112}$$

Ecuația de momente față de axa *x* este

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \tag{7.113}$$

iar ecuația de momente față de axa *y* este

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0\ . \tag{7.114}$$

Înlocuind forțele tăietoare din (7.113) şi (7.114) în (7.112) se obține ecuația de echilibru în funcție de momente

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p\,. \tag{7.115}$$

7.3.6 Ecuația săgeții plăcii

Exprimând în (7.113) şi (7.114) forțele tăietoare în funcție de săgeți

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial M_T}{\partial x}, \tag{7.116}$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial M_T}{\partial y}, \tag{7.117}$$

şi înlocuind în (7.112) se obține ecuația de echilibru în funcție de săgeata plăcii

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)= p-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)M_T, \tag{7.118}$$

$$D\nabla^4 w = p-\nabla^2 M_T, \tag{7.119}$$

sau

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p}{D}-\frac{1}{D}\left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2}\right). \tag{7.120}$$

Dacă temperatura variază numai pe grosimea plăcii iar diferența de temperatură T este constantă în toată placa, al doilea termen în ecuațiile (7.118) - (7.120) este zero şi acestea iau forma corespunzătoare plăcii fără efecte termice. Condiția este îndeplinită şi în cazul variației liniare a temperaturii în planul plăcii.

7.3.7 Condițiile la limită

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale a plăcii sunt necesare câte două condiții la limită la fiecare margine. Acestea se pot referi la valorile săgeții sau înclinării normalei (pantei), la eforturi în placă sau combinații ale acestora.

Spre deosebire de bare, în lungul marginilor plăcilor pot apare momente de răsucire distribuite. Acestea pot fi înlocuite cu forțe verticale echivalente distribuite care, adăugate forței tăietoare verticale, produc o forță verticală efectivă.

Fie două elemente succesive de lungimi dy pe o margine $x = a$ a plăcii din figura 7.21. Asupra elementului din dreapta acționează momentul de răsucire $M_{xy}\,\mathrm{d}y$, iar asupra elementului din stânga acționează $\left[M_{xy}+\left(\partial M_{xy}/\partial y\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}y$.

Aceste momente pot fi înlocuite prin cupluri de forțe verticale echivalente, care produc doar diferențe locale în distribuția tensiunilor în lungul marginii $x = a$. Distribuția tensiunilor la o oarecare distanță în placă nu este influențată de această înlocuire, conform principiului lui Saint-Venant.

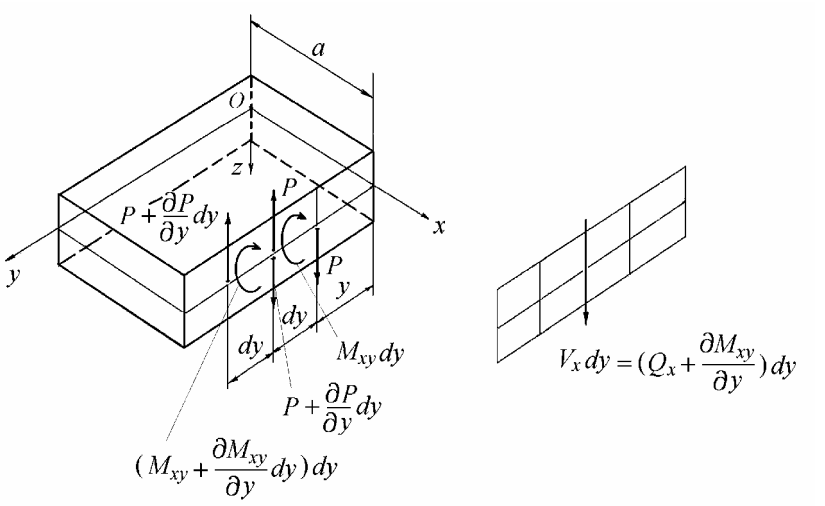


Fig. 7.21

Asupra elementului din dreapta acționează cuplul forțelor $P = M_{xy}$ iar asupra elementului din stânga acționează cuplul forțelor $P+\left(\partial P/\partial y\right)\mathrm{d}y = M_{xy}+\left(\partial M_{xy}/\partial y\right)\mathrm{d}y$. La granița între cele două elemente, acționează o forță verticală P în sus şi o forță verticală $P+\left(\partial P/\partial y\right)\mathrm{d}y$ în jos. Rezultanta acestor două forțe, pe unitatea de lungime, $\partial P/\partial y = \partial M_{xy}/\partial y$, se poate aduna la forța tăietoare distribuită Q_x pentru a produce o forță tăietoare *efectivă* pe unitatea de lungime a conturului

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \tag{7.121}$$

cunoscută ca *forța lui Kirchhoff.*

Pe baza relațiilor (7.107) şi (7.116), forța lui Kirchhoff poate fi exprimată în funcție de săgeata plăcii

$$V_x = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(2-\nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right]-\frac{\partial M_T}{\partial x}. \tag{7.122}$$

Când temperatura variază numai pe grosimea plăcii, al doilea termen din membrul drept al expresiei (7.122) este zero.

Condiția a fost stabilită de G. Kirchhoff (1850) din considerente variaționale, iar explicația fizică a fost dată de Kelvin şi P. G. Tait (1883).

Pentru o margine $x = a$ pot exista trei feluri de condiții de rezemare:

a. Contur încastrat

În acest caz, săgeata şi panta sunt nule

$$\text{la } x = a \qquad w = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \tag{7.123}$$

dar şi $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$, căci marginea este dreaptă.

b. Contur simplu rezemat

În acest caz, săgeata şi momentul încovoietor sunt nule

$$\text{la } x = a \qquad w = 0 \quad \text{şi} \quad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - M_T = 0\,.$$

Deoarece $w = 0$ implică $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$ şi $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, condițiile de mai sus devin

$$\text{la } x = a \qquad w = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_T}{D}\,. \tag{7.124}$$

De remarcat că pe un contur simplu rezemat momentul de răsucire M_{yx} nu poate fi nul, deoarece conform ultimei relații (7.108) ar fi trebuit îndeplinită condiția $\partial^2 w/\partial x\,\partial y = 0$. De aici ar fi rezultat că unghiul de rotație $\varphi = -\partial w/\partial x$ pe conturul simplu rezemat nu depinde de y, $\partial\varphi/\partial y = 0$, ceea ce nu este adevărat în cazul general de încărcare a plăcii. Pentru ca unghiurile plăcii să nu se modifice, este necesar să se aplice pe contur momente de răsucire repartizate în mod corespunzător.

c. Contur liber

Momentul încovoietor M_x şi forța tăietoare efectivă V_x sunt nule

$$\text{la } x = a \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_T}{D}\,,$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(2 - \nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} = -\frac{1}{D}\frac{\partial M_T}{\partial x}\,. \tag{7.125}$$

De menționat că pe un contur liber există de fapt trei condiții la limită

$$M_x = 0\,,\ Q_x = 0 \ \text{şi}\ M_{xy} = 0\,,$$

care nu pot fi îndeplinite simultan datorită adoptării ipotezei normalei rectilinii. Contradicția se înlătură prin combinarea ultimelor două condiții în una singură, $V_x = 0$.

7.3.8 Reducerea încovoierii plăcii la deformarea unei membrane

Ecuația diferențială a încovoierii plăcii (7.118) fără efecte termice se poate scrie sub forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{p}{D}. \tag{7.126}$$

Adunând expresiile momentelor încovoietoare M_x şi M_y (7.107), se obține

$$M_x + M_y = -D\left(1+\nu\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{7.127}$$

Dacă se introduce o nouă variabilă

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu}\,, \tag{7.128}$$

relația (7.127) se scrie

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{M}{D}\,. \tag{7.129}$$

Înlocuind (7.129) în (7.126) se obține

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}=-p\,. \tag{7.130}$$

Ecuațiile (7.129) şi (7.130) au forma celor obținute pentru o membrană întinsă uniform şi încărcată transversal. Soluția problemei plăcii se reduce la integrarea succesivă a acestor ecuații (H. Marcus, 1932). Se rezolvă întâi a doua ecuație (7.130) căutând o soluție care satisface condiția $M = 0$ pe contur. Introducând această soluție în ecuația (7.129) şi integrând-o se obțin deplasările *w*.

Dacă *n* este axa normală la contur şi *t* axa perpendiculară pe *n* (în general tangentă la contur) în lungul conturului rectiliniu, atunci tensiunile σ_n produc

momentul încovoietor M_n dirijat în lungul conturului, iar pe latura perpendiculară va acționa M_t.

Dacă placa simplu rezemată pe contur este încărcată doar cu momente M_n uniform distribuite de-a lungul conturului, ecuația (7.130) devine

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}=0\,, \tag{7.131}$$

iar pe contur

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=-\frac{M_n}{D}\,. \tag{7.132}$$

Condiția (7.132) şi ecuația (7.131) sunt satisfăcute dacă se alege $M=M_n=const.$ în toate punctele plăcii. Conform notației (7.128) aceasta implică faptul că suma momentelor încovoietoare M_x şi M_y rămâne constantă pe toată suprafața plăcii. Deplasările plăcii se calculează din (7.129) care devine

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{M_n}{D}\,. \tag{7.133}$$

Rezultă că suprafața deformată a plăcii simplu rezemate, solicitată de un moment M_n uniform distribuit pe contur, este aceeaşi ca a unei membrane uniform întinse, încărcată cu o sarcină uniform distribuită, având acelaşi contur.

Această metodă pentru studiul încovoierii unei plăci dreptunghiulare simplu rezemate poate fi aplicată şi pentru determinarea tensiunilor termice produse de încălzirea neuniformă, utilizând metoda lui Duhamel.

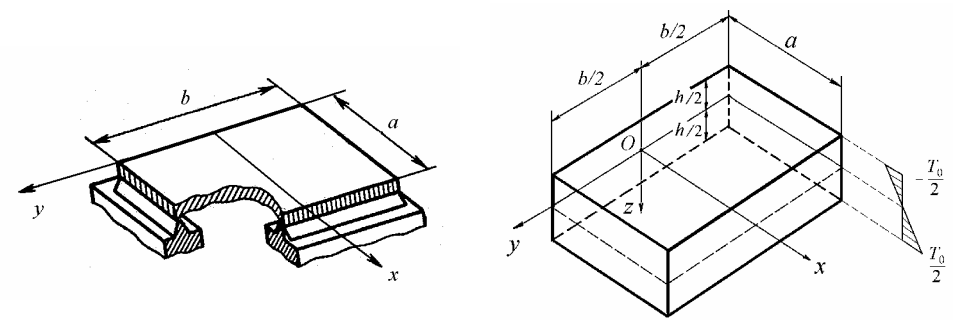
În starea întâi de încărcare, se aplică tensiuni normale fictive care rigidizează placa, deci anulează săgeata, ca la o placă încastrată pe contur. La marginile plăcii, în încastrare, tensiunile fictive sunt echivalente cu un moment încovoietor uniform distribuit M_T care se opune încovoierii plăcii.

Încastrarea poate fi înlocuită cu un reazem simplu pe care acționează momentul M_T. Deoarece pe reazeme simple momentul distribuit este nul, în starea a doua de încărcare se aplică un moment egal şi de sens contrar $-M_T$, se calculează săgețile produse de acest moment, care descriu deformata reală a plăcii (deoarece la prima încărcare săgeata este nulă), apoi momentele încovoietoare şi tensiunile din placă. Tensiunile termice finale se obțin prin însumarea tensiunilor din prima şi a doua stare de încărcare.

7.3.9 Plăci simplu rezemate încălzite neuniform

Fie o placă dreptunghiulară fără sarcini exterioare, simplu rezemată pe toate laturile (fig. 7.22, *a*), încălzită neuniform pe grosimea *h* astfel încât temperatura are o variație liniară $T = T_0\, z/h$, unde T_0 este diferența de temperatură între fața de jos şi cea de sus ale plăcii (fig. 7.22, *b*).

Pentru determinarea tensiunilor termice din placă se utilizează procedeul lui J. I. Maulbetsch (1935) bazat pe metoda lui Duhamel, descris în detaliu de Timoshenko şi Woinowsky-Krieger (1940).



a *b*

Fig. 7.22

Se aplică prima stare de încărcare prin care se blochează deformațiile de încovoiere ale plăcii. Ca urmare se poate admite că marginile plăcii sunt încastrate. Tensiunile care anulează deformațiile produse de încălzirea neuniformă sunt echivalente cu un moment încovoietor uniform distribuit de-a lungul conturului

$$M_n = -\frac{\alpha T_0 D(1+\nu)}{h} = -\frac{E\alpha T_0}{1-\nu}\frac{h^2}{12}. \qquad (7.134)$$

În starea a doua de solicitare, se înlocuieşte încastrarea cu reazeme simple pe care este aplicat un moment încovoietor egal şi de sens contrar

$$M_n' = \frac{\alpha T_0 D(1+\nu)}{h} = \frac{E\alpha T_0}{1-\nu}\frac{h^2}{12}, \qquad (7.135)$$

astfel încât momentul rezultant pe reazeme să fie nul.

Deoarece de-a lungul unei margini simplu rezemate curbura este nulă

$$M_t' = \nu M_n', \qquad (7.136)$$

rezultă că pe contur

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = \frac{M_n' + M_t'}{1+\nu} = \frac{\alpha T_0 D(1+\nu)}{h} = \frac{E\alpha T_0}{1-\nu}\frac{h^2}{12}. \tag{7.137}$$

Ecuația (7.131)

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 0 \tag{7.138}$$

este satisfăcută pentru *M* constant pe toată placa, deci egal cu valoarea de pe contur (7.137).

Ecuația (7.129) devine

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\alpha T_0 (1+\nu)}{h}. \tag{7.139}$$

Soluția ecuației (7.139) se scrie sub forma

$$w = w_1 + w_2 \tag{7.140}$$

unde w_2 este soluția ecuației omogene iar w_1 este soluția particulară corespunzătoare membrului drept constant.

Din analogia cu membrana, se observă că w_1 este deplasarea unei fâşii uniform încărcate şi solicitate axial astfel încât intensitatea sarcinii transversale împărțită prin forța axială să fie egală cu $\alpha T_0 (1+\nu)/h$.

În acest caz, axa deformată a fâşiei va fi o parabolă

$$w_1 = \frac{\alpha T_0 (1+\nu)}{h}\,\frac{x(a-x)}{2}, \tag{7.141}$$

sau, reprezentând parabola printr-o serie trigonometrică,

$$w_1 = \frac{\alpha T_0 (1+\nu)}{h}\frac{4a^2}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}}{m^3}, \tag{7.142}$$

unde, datorită simetriei, s-au reținut doar indicii impari $m = 1,3,5,\ldots$.

Soluția ecuației omogene se poate lua de forma

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} Y_m \sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{7.143}$$

unde Y_m este funcție numai de *y*. Soluția (7.143) a fost propusă de M. Lévy (1899) pentru plăcile dreptunghiulare simplu rezemate pe două laturi opuse.

Se observă că fiecare termen al seriei (7.143) satisface condițiile $w = 0$ și $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ pentru $x = 0$ și $x = a$. Rămâne să se determine funcția Y_m astfel încât să satisfacă atât condițiile de pe laturile $y = \pm b/2$ cât și ecuația omogenă

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 . \tag{7.144}$$

Introducând (7.143) în ecuația (7.144) se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y_m}{\mathrm{d}x^2} - \frac{m^2\pi^2}{a^2} Y_m = 0 ,$$

cu soluția generală

$$Y_m = A_m \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} . \tag{7.145}$$

Deoarece deformata plăcii este simetrică în raport cu axa, Y_m trebuie să fie o funcție pară de *y* și deci $A_m = 0$. În final se obține

$$w = w_1 + w_2 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sin\frac{m\pi x}{a} \left[\frac{\alpha T_0 (1+\nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3 m^3} + B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} \right]. \tag{7.146}$$

Pentru a satisface condițiile la limită $w = 0$ pe marginile $y = \pm b/2$, trebuie ca

$$\frac{\alpha T_0 (1+\nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3 m^3} + B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi b}{a} = 0 . \tag{7.147}$$

Introducând valoarea constantei B_m din (7.147) în (7.146), rezultă expresia săgeții plăcii

$$w = \frac{\alpha T_0 (1+\nu)\, 4a^2}{\pi^3 h} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}}{m^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\dfrac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\alpha_m} \right), \tag{7.148}$$

unde

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}. \tag{7.149}$$

Înlocuid expresia săgeții în (7.107) se obțin expresiile momentelor încovoietoare

$$M_x = \frac{4D\alpha T_0\left(1-\nu^2\right)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a}}{m\,\mathrm{ch}\,\alpha_m},$$

$$M_x = \frac{2E\alpha T_0}{\pi}\frac{h^2}{6} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a}}{m\,\mathrm{ch}\,\alpha_m}, \tag{7.150}$$

$$M_y = -\frac{E\alpha T_0}{2}\frac{h^2}{6} + \frac{2E\alpha T_0}{\pi}\frac{h^2}{6} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{ch}\frac{m\pi y}{a}}{m\,\mathrm{ch}\,\alpha_m}. \tag{7.151}$$

Acestea au valorile maxime pe contur

$$\left(M_x\right)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \left(M_y\right)_{x=0,\,x=a} = -\frac{D\alpha T_0\left(1-\nu^2\right)}{h} = -\frac{E\alpha T_0}{2}\frac{h^2}{6}. \tag{7.152}$$

Se observă că aceste momente se obțin înmulțind valoarea lui M_n din (7.134) prin $\left(1-\nu\right)$. Acelaşi rezultat se obține dacă se observă că momentele M_n' care se aplică de-a lungul conturului dau naştere pe direcție perpendiculară la momentele

$$M_t' = \nu M_n' = \nu\frac{\alpha T_0 D\left(1+\nu\right)}{h} \tag{7.153}$$

care suprapuse peste momentele (7.134) dau valoarea (7.152).

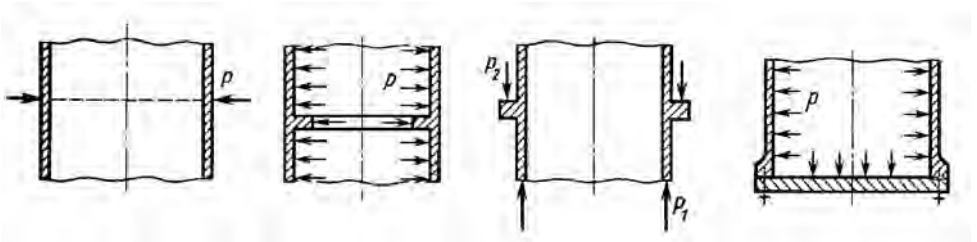
Tensiunile termice maxime apar pe contur şi sunt

$$\left(\sigma_x\right)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \left(\sigma_y\right)_{x=0,\,x=a} = -\frac{E\alpha T_0}{2}. \tag{7.154}$$

În prezent aceste probleme se rezolvă numeric, utilizând programe de calcul bazate pe metoda elementelor finite.

8.
ÎNVELIŞURI CILINDRICE

Învelişurile cilindrice cu pereți subțiri se calculează cu aşa-numita “teorie cu momente” când se admit deformații locale de încovoiere în secțiunile în care se aplică sarcini exterioare radiale concentrate (fig. 8.1, *a*) şi în zonele de rigidizare fig. 8.1, *b* şi *c*) sau de asamblare cu alte elemente constructive (fig. 8.1, *d*).



a *b* *c* *d*

Fig. 8.1

8.1 Ipoteze de bază

Teoria învelişurilor cilindrice cu pereți subțiri se bazează pe următoarele ipoteze, similare ipotezelor Kirchhoff-Love din teoria încovoierii plăcilor subțiri:

a. Ipoteza nemodificării normalei, conform căreia normalele la suprafața mediană a învelişului rămân rectilinii şi perpendiculare pe suprafața mediană deformată. Această ipoteză reduce studiul deformațiilor într-un punct oarecare al învelişului, la cel al deformațiilor suprafeței mediane.

b. Ipoteza independenței acțiunii straturilor, conform căreia tensiunile normale pe suprafețele paralele cu suprafața neutră sunt nule, deci se consideră că învelişul este într-o stare plană de tensiuni.

Ipotezele de mai sus sunt valabile când grosimea învelişului este mică în comparație cu raza medie a cilindrului şi când deplasările punctelor suprafeței mediane sunt mici în comparație cu grosimea învelişului.

Dacă se admite o eroare de 5% în calculul tensiunilor, atunci învelişul este considerat cu pereți subțiri când grosimea sa nu depăşeşte $1/20$ din rază.

În plus, se va considera că materialul învelişului este omogen, izotrop şi liniar elastic, deci este valabilă legea lui Hooke.

Se utilizează următoarele notații (fig. 8.2): *r* – raza medie a cilindrului, *h* – grosimea peretelui, *x* – coordonata longitudinală măsurată de la capătul cilindrului, *u* şi *w* – deplasările unui punct din suprafața mediană pe direcție axială, respectiv radială.

8.2 Relațiile între deformații specifice şi deplasări

În figura 8.2 se arată un element de lungime *dx* înainte şi după deformarea învelişului.

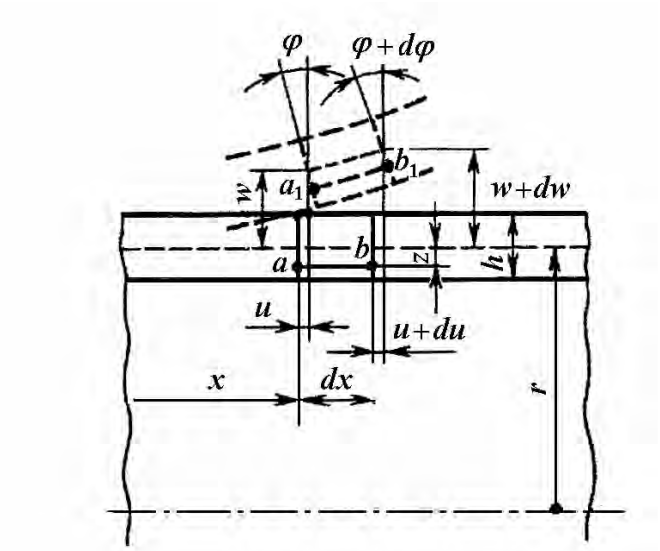


Fig. 8.2

Un segment *ab* situat la distanța *z* de suprafața mediană (*z* pozitiv spre interior) după deformație devine a_1b_1. Punctul a_1 are o deplasare axială $u + z\varphi$, iar punctul b_1 are o deplasare $u + du + z(\varphi + d\varphi)$. Alungirea segmentului ab este $du + z\,d\varphi$, deci alungirea specifică axială este

$$\varepsilon_x = \frac{du + z\,d\varphi}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} z\,. \tag{8.1}$$

Unghiul de înclinare a normalei este egal cu panta

$$\varphi = \frac{dw}{dx}, \tag{8.2}$$

(*w* pozitiv spre exterior) deci

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} z\,. \tag{8.3}$$

Alungirea specifică circumferențială se obține împărțind creșterea lungimii perimetrului cercului care trece prin *a* la lungimea inițială

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi\left(r - z + w\right) - 2\pi\left(r - z\right)}{2\pi\left(r - z\right)} = \frac{w}{r - z}$$

şi deoarece se presupune că $z << r$

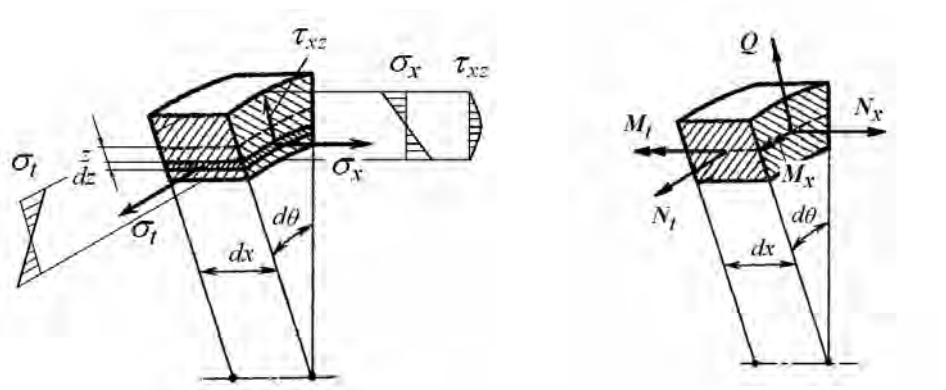
$$\varepsilon_t = \frac{w}{r}. \tag{8.4}$$

8.3 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice

Considerând o stare plană de tensiuni, cu $\sigma_z = 0$, legea lui Hooke se scrie

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_t\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}, \tag{8.5}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_t + \nu\,\varepsilon_x\right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}. \tag{8.6}$$



a *b*

Fig. 8.3

Înlocuind (8.3) şi (8.4) în (8.5) şi (8.6) se obțin expresiile tensiunilor în funcție de deplasări

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2}z + \nu\frac{w}{r} - (1+\nu)\alpha T\right], \qquad (8.7)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{w}{r} + \nu\frac{du}{dx} + \nu\frac{d^2w}{dx^2}z - (1+\nu)\alpha T\right]. \qquad (8.8)$$

Tensiunile normale din placă variază liniar pe grosime (fig. 8.3, *a*). În afara acestora, în înveliş mai acționează şi tensiuni tangențiale τ_{xz} paralele cu axa *z*, a căror distribuție pe grosime este parabolică, cu valori nule la extremități.

8.4 Relațiile între eforturi şi tensiuni

Între tensiunile din înveliş (fig. 8.3, *a*) şi eforturile interioare (fig. 8.3, *b*) se stabilesc următoarele relații de echivalență

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \,\mathrm{d}z, \quad N_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t \,\mathrm{d}z\ , \qquad (8.9)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \,\mathrm{d}z, \quad M_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t \, z\,\mathrm{d}z\ , \qquad (8.10)$$

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \,\mathrm{d}z\,. \qquad (8.11)$$

Se presupune o variație liniară a temperaturii pe grosimea învelişului, justificată de grosimea mică, de forma

$$T = T_m + \Delta T\frac{z}{h}, \qquad (8.12)$$

unde

$$T_m = \frac{T_i + T_e}{2}, \qquad (8.13)$$

$$\Delta T = T_i - T_e\,. \qquad (8.14)$$

Înlocuind tensiunile din ecuațiile (8.7) şi (8.8) în relațiile (8.9), (8.10) şi integrând, se obțin următoarele relații între eforturi şi deplasări

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{dx} + \nu\frac{w}{r} - (1+\nu)\,\alpha T_m\right], \tag{8.15}$$

$$N_t = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{w}{r} + \nu\frac{du}{dx} - (1+\nu)\,\alpha T_m\right], \tag{8.16}$$

$$M_x = D\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - (1+\nu)\,\alpha\frac{\Delta T}{h}\right], \tag{8.17}$$

$$M_t = D\left[\nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - (1+\nu)\,\alpha\frac{\Delta T}{h}\right], \tag{8.18}$$

unde D este *rigiditatea la încovoiere* a învelişului

$$D = \frac{E h^3}{12\,(1-\nu^2)}. \tag{8.19}$$

Se stabilesc următoarele relații între eforturi

$$\frac{M_x - M_t}{1-\nu} = D\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}, \tag{8.20}$$

$$N_t = \nu N_x + \frac{Ehw}{r} - Eh\alpha T_m. \tag{8.21}$$

Relațiile (8.15) –(8.18) se mai scriu

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dx} + \nu\frac{w}{r}\right) - N_T, \tag{8.15, *a*}$$

$$N_t = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{w}{r} + \nu\frac{du}{dx}\right) - N_T, \tag{8.16, *a*}$$

$$M_x = D\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - M_T\ , \tag{8.17, *a*}$$

$$M_t = \nu D\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - M_T\ , \tag{8.18, *a*}$$

unde

$$N_T = \frac{E\alpha T_m}{1-\nu}\,h, \qquad M_T = \frac{E\alpha\,\Delta T}{1-\nu}\,\frac{h^2}{12}. \tag{8.22}$$

8.5 Ecuațiile de echilibru

Un element detaşat din înveliş prin două plane axiale şi două suprafețe infinit vecine perpendiculare pe axa longitudinală (fig. 8.4) este în echilibru sub acțiunea sarcinilor exterioare p_1 şi p_2, a momentelor şi forțelor distribuite liniar.

Ecuația de proiecții a forțelor pe direcția *x* este

$$\frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x} = -p_2 . \tag{8.23}$$

Ecuația de proiecții a forțelor pe direcția razei (*z*) este

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{N_t}{r} = p_1 . \tag{8.24}$$

Ecuația de momente față de tangenta la cerc este

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = Q . \tag{8.24}$$

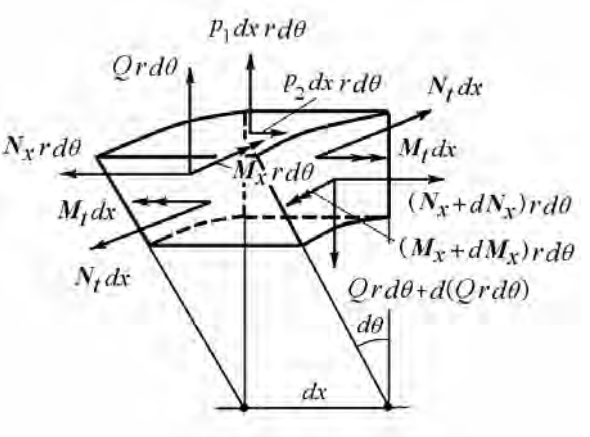


Fig. 8.4

Ecuația (8.23) fiind decuplată de celelalte, forța N_x poate fi calculată din ecuația respectivă sau direct, din echilibrul axial al învelişului. Astfel, pentru un vas cilindric închis la capete

$$2\pi r N_x = p\pi r^2 ,$$

$$N_x = \frac{pr}{2}.$$

8.6 Ecuația deplasării radiale

Ținând cont de (8.17), din (8.25) se obține

$$Q = D\left[\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} - (1+\nu)\frac{\alpha}{h}\frac{\mathrm{d}(\Delta T)}{\mathrm{d}x}\right]. \tag{8.26}$$

Înlocuind (8.21) şi (8.26) în (8.24) rezultă ecuația deplasării radiale

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_1}{D} - \nu\frac{N_x}{rD} - \frac{E\alpha T_m h}{rD} + (1+\nu)\frac{\alpha}{h}\frac{\mathrm{d}^2(\Delta T)}{\mathrm{d}x^2}, \tag{8.27}$$

unde

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2}}. \tag{8.28}$$

8.7 Tensiunile normale

Prin rezolvarea ecuației (8.27) se determină *w*, apoi se calculează eforturile (8.15)-(8.18), pe baza cărora se determină tensiunile normale

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{h} + \frac{M_x}{h^3/12} z, \\ \sigma_t &= \frac{N_t}{h} + \frac{M_t}{h^3/12} z. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Valorile maxime ale tensiunilor apar la $z = \pm h/2$

$$\begin{aligned} \sigma_{x\max} &= \frac{N_x}{h} \pm \frac{6M_x}{h^2}, \\ \sigma_{t\max} &= \frac{N_t}{h} \pm \frac{6M_t}{h^2}. \end{aligned} \tag{8.30}$$

8.8 Soluția ecuației deplasării radiale

Soluția ecuației (8.27) se compune din suma soluției ecuației omogene $\hat{w}$ și soluția particulară $\overline{w}$ a ecuației cu membrul drept.

Soluția ecuației omogene

$$\frac{\mathrm{d}^4\hat{w}}{\mathrm{d}x^4} + 4\beta^4\hat{w} = 0 \tag{8.32}$$

este de forma

$$\hat{w} = C\,\mathrm{e}^{kx}.$$

Înlocuind această funcție în ecuația (8.32) se obține ecuația caracteristică

$$k^4 + 4\beta^4 = 0 \tag{8.33}$$

ale cărei rădăcini sunt

$$k_{1,2} = \pm\beta + \mathrm{i}\beta, \qquad k_{3,4} = \mp\beta - \mathrm{i}\beta. \tag{8.34}$$

Rezultă soluția generală a ecuației omogene

$$\hat{w} = C_1\,\mathrm{e}^{(\beta+\mathrm{i}\beta)x} + C_2\,\mathrm{e}^{(-\beta+\mathrm{i}\beta)x} + C_3\,\mathrm{e}^{(-\beta-\mathrm{i}\beta)x} + C_4\,\mathrm{e}^{(\beta-\mathrm{i}\beta)x}$$

sau

$$\hat{w} = \mathrm{e}^{-\beta x}\left(C_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + C_3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}\right) + \mathrm{e}^{\beta x}\left(C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + C_4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}\right) \tag{8.35}$$

unde $C_1,...,C_4$ sunt constante de integrare complexe.

Soluția particulară $\overline{w}$ depinde de legile de distribuție ale sarcinilor p_1 și p_2. În aplicații practice, aceste sarcini sunt fie constante, fie funcții liniare sau pătratice de *x*. În acest caz, deoarece

$$\frac{\mathrm{d}^4 p_1}{\mathrm{d}x^4} = 0,\ \frac{\mathrm{d}^4 N_x}{\mathrm{d}x^4} = 0\ \left(\frac{\mathrm{d}^3 p_2}{\mathrm{d}x^3} = 0\right), \frac{\mathrm{d}^4 T_m}{\mathrm{d}x^4} = 0, \frac{\mathrm{d}^2(\Delta T)}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

se obține următoarea expresie a soluției particulare

$$\overline{w} = \left(p_1 - \nu\frac{N_x}{r}\right)\frac{r^2}{Eh} + r\alpha T_m. \tag{8.36}$$

Soluția ecuației (8.27) se mai scrie

$$\hat{w} = \mathrm{e}^{-\beta x}\left(A_1\sin\beta x + A_2\cos\beta x\right) + \mathrm{e}^{\beta x}\left(A_3\sin\beta x + A_4\cos\beta x\right) + \overline{w}, \tag{8.37}$$

unde $A_1,...,A_4$ sunt constante de integrare reale.

Primul termen scade repede cu *x*, deoarece conține $e^{-\beta x}$, în timp ce al doilea termen, care conține $e^{\beta x}$, creşte repede cu *x*. Deoarece valorile deplasării radiale trebuie să fie mici chiar pentru valori mari ale lui *x*, constantele A_3 şi A_4 trebuie să fie foarte mici. În zona din vecinătatea originii, termenul al doilea se poate neglija şi considera aproximativ $A_3 = A_4 = 0$, deci

$$w = e^{-\beta x}\left(A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x\right) + \overline{w}\,, \qquad (8.38)$$

unde A_1 şi A_2 se determină din condițiile la limită la $x = 0$.

Dacă se admite o eroare de 5% în calculul deplasărilor, deoarece pentru $\beta x > 3$ funcțiile de tipul $e^{-\beta x}\sin \beta x$ şi $e^{-\beta x}\cos \beta x$, ca şi derivatele lor, iau valori mai mici ca $0{,}005$, rezultă că un înveliş poate fi considerat lung dacă

$$\beta x \geq 3 \qquad (8.39)$$

sau

$$\ell \geq 2{,}5\sqrt{rh}\,. \qquad (8.40)$$

Când condiția (8.40) este îndeplinită, eroarea rezultată admițând soluția aproximativă (8.38) nu depăşeşte 5% (Boiarşinov, 1973).

8.9 Condițiile la limită

Constantele de integrare în (8.35) se determină din condițiile la limită, câte două pentru fiecare capăt.

La un capăt încastrat rigid (fig. 8.5, *a*)

$$w = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

La un capăt simplu rezemat (fig. 8.5, *b*)

$$w = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M_T}{D} \ \text{(deoarece } M_x = 0\text{)}.$$

La un capăt liber (fig. 8.5, *c*)

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M_T}{D} \qquad \text{şi} \qquad D\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = \left(1+\nu\right)\frac{\alpha}{h}\frac{\mathrm{d}\left(\Delta T\right)}{\mathrm{d}x}\,.$$

La un capăt încărcat cu un moment M_0 şi cu o forță Q_0 (fig. 8.5, *d*)

$$D\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} - M_T = M_0,$$

$$D\left[\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} - (1+\nu)\frac{\alpha}{h}\frac{\mathrm{d}(\Delta T)}{\mathrm{d}x}\right] = Q_0.$$

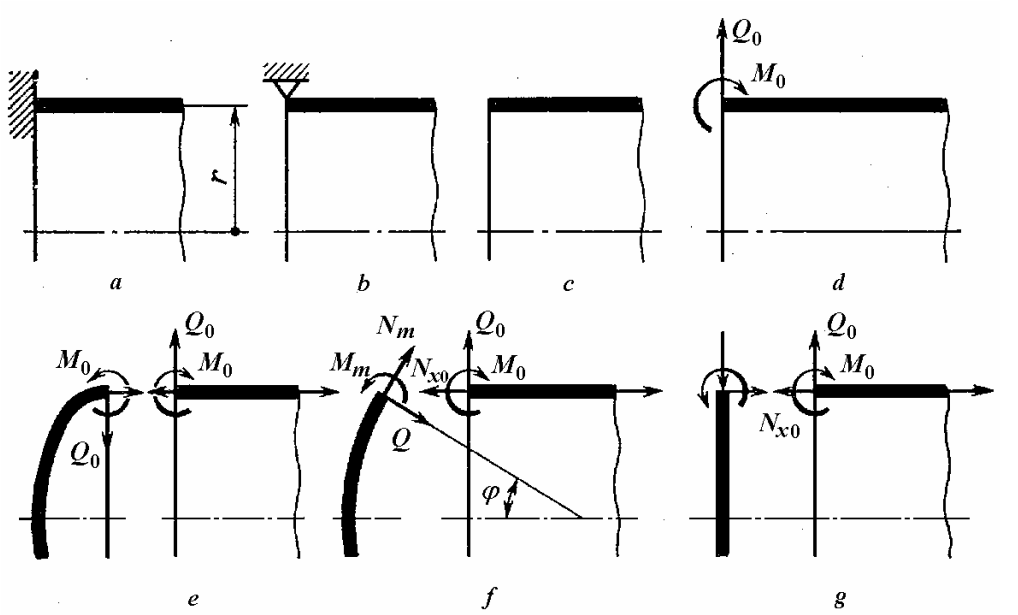


Fig. 8.5

În cazul sudării cilindrului de un alt înveliş (fig. 8.5, *e* şi *f*), trebuie îndeplinite patru condiții (două pentru fiecare înveliş): a) egalitatea deplasărilor radiale *w* sau a alungirilor specifice circumferențiale ε_t, b) egalitatea unghiurilor de înclinare a normalei φ, c) egalitatea momentelor M_m şi M_0, şi d) egalitatea componentelor radiale ale forțelor interioare

$$\left(Q\sin\varphi - N_m\cos\varphi\right)_{capac} = Q_{0\,cilindru}.$$

Egalitatea componentelor axiale ale forțelor interioare nu poate fi utilizată la determinarea constantelor de integrare deoarece este deja folosită la determinarea efortului N_x.

În cazul sudării învelişului cilindric de un capac plan (fig. 8.5, *g*), prima condiție devine $w_0 = 0$ (suprafața mediană a plăcii nu se întinde) iar condiția a patra devine inutilă.

8.10 Metoda parametrilor inițiali

În calcule practice este util să se exprime constantele de integrare A_1 şi A_2 din (8.38) în funcție de eforturile M_0 şi Q_0 în secțiunea din originea coordonatelor.

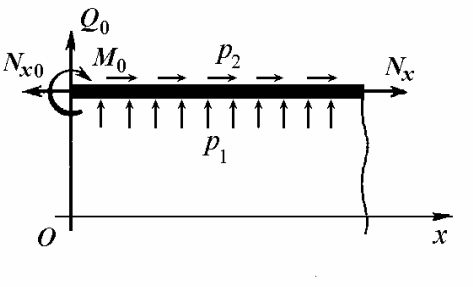


Fig. 8.6

Se consideră un înveliş cilindric semi-infinit, încărcat cu o presiune interioară p_1 uniform distribuită, cu sarcile axiale p_2 şi N_{x0}, şi eforturile M_0 şi Q_0 (fig. 8.6).

Condițiile la limită la $x = 0$ sunt

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M_0}{D} \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = \frac{Q_0}{D}. \tag{8.41}$$

Rezultă constantele de integrare

$$A_1 = -\frac{M_0}{2D\beta^2}, \quad A_2 = \frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{Q_0}{2D\beta^3}. \tag{8.42}$$

Înlocuind (8.42) în (8.38) şi utilizând relațiile (8.17), (8.18) şi (8.21) *fără efecte termice*, se obțin următoarele expresii

$$w = \frac{M_0}{2D\beta^2}\,\mathrm{e}^{-\beta x}\left(\cos\beta x - \sin\beta x\right) + \frac{Q_0}{2D\beta^3}\,\mathrm{e}^{-\beta x}\cos\beta x + \overline{w}, \tag{8.43}$$

$$\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\frac{M_0}{D\beta}\,\mathrm{e}^{-\beta x}\cos\beta x - \frac{Q_0}{2D\beta^2}\,\mathrm{e}^{-\beta x}\left(\cos\beta x + \sin\beta x\right) + \frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}x}, \tag{8.44}$$

$$M_x = D\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = M_0\,\mathrm{e}^{-\beta x}\left(\cos\beta x + \sin\beta x\right) + \frac{Q_0}{\beta}\,\mathrm{e}^{-\beta x}\sin\beta x + D\,\frac{\mathrm{d}^2\overline{w}}{\mathrm{d}x^2}, \tag{8.45}$$

$$M_y = \nu M_x , \tag{8.46}$$

$$Q = D\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = -2M_0\beta\,\mathrm{e}^{-\beta x}\sin\beta x + Q_0\,\mathrm{e}^{-\beta x}\left(\cos\beta x - \sin\beta x\right) + D\frac{\mathrm{d}^3\overline{w}}{\mathrm{d}x^3} , \tag{8.47}$$

$$\begin{aligned} N_t &= \nu N_x + \frac{Ehw}{r} = \\ &= 2r\beta^2\left[M_0\,\mathrm{e}^{-\beta x}\left(\cos\beta x - \sin\beta x\right) + \frac{Q_0}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta x}\cos\beta x \right] + p_1 r , \end{aligned} \tag{8.48}$$

unde $\overline{w}$ este soluția particulară (8.36).

8.11 Aplicații numerice

În continuare se prezintă două exemple de calcul al tensiunilor termice în învelişuri cilindrice subțiri calculate în teoria cu momente. Pentru simplificare se consideră cilindri infinit lungi, pentru a elimina efectele de capăt. În al doilea exemplu se arată că variația bruscă a grosimii peretelui unui vas cilindric încălzit neuniform produce tensiuni termice locale relativ mari.

Exemplul 8.1

Se cer tensiunile termice într-un înveliş de lungime infinită, având la interior temperatura T_i iar la exterior temperatura $T_e < T_i$. Temperatura nu variază în lungul cilindrului.

Rezolvare. Distribuția dată a temperaturii poate fi descompusă într-o încălzire uniformă cu $T_m = \left(T_i + T_e\right)/2$, care nu produce tensiuni termice şi o variație liniară simetrică cu diferența $\Delta T = T_i - T_e$ (fig. 8.7).

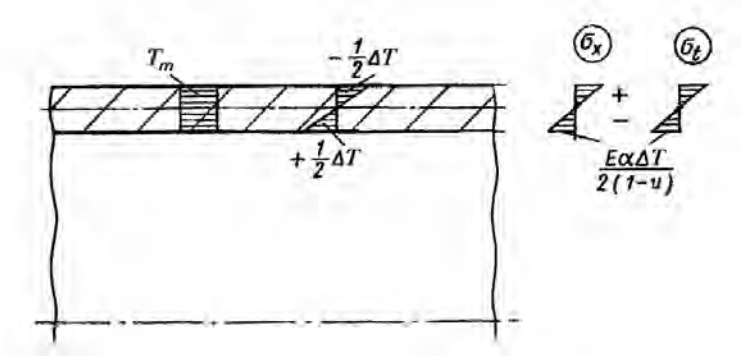


Fig. 8.7

Deoarece temperatura nu variază în lungul cilindrului, soluția ecuației omogene este zero. Pentru $p_1 = 0$, $N_x = 0$ şi $T_m = 0$, este nulă şi soluția particulară (8.36).

Rezultă că deplasările radiale *w* ale punctelor suprafeței mediane şi, conform (8.21), eforturile circumferențiale N_t sunt nule.

Totuşi momentele încovoietoare nu sunt nule. Acestea compensează deformațiile produse de încălzirea neuniformă. Conform (8.17) şi (8.18)

$$M_x = M_t = -M_T = -(1+\nu)\frac{D}{h}\alpha\,\Delta T \tag{8.48}$$

iar tensiunile termice

$$\begin{aligned}\sigma_{x_{\max}} &= \mp\frac{6M_x}{h^2} = \pm\frac{6M_T}{h^2} = \pm\frac{E\,\alpha\,\Delta T}{2(1-\nu)},\\ \sigma_{t_{\max}} &= \mp\frac{6M_t}{h^2} = \pm\frac{6M_T}{h^2} = \pm\frac{E\,\alpha\,\Delta T}{2(1-\nu)}.\end{aligned} \tag{8.49}$$

Diagramele de variație ale tensiunilor pe grosimea peretelui sunt date în figura 8.7.

Exemplul 8.2

Un înveliş cilindric cu variație bruscă de grosime (fig. 8.8, *a*), are la interior temperatura $T_i = 100^0\text{C}$ şi la exterior temperatura $T_e = 40^0\text{C}$. Temperatura nu variază în lungul învelişului. Se dau $r = 0{,}5\,\text{m}$, $h_1 = 20\,\text{mm}$, $h_2 = 10\,\text{mm}$, $\nu = 0{,}3$, $E = 200\,\text{GPa}$ şi $\alpha = 11\cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$. Se cer tensiunile termice din înveliş (Boiarşinov, 1973).

Rezolvare. Temperatura medie $T_m = 70^0\text{C}$ nu produce tensiuni ci doar diferența $\Delta T = 60^0\text{C}$.

Se împarte învelişul în două părți, fiecare cu grosime constantă. Se consideră că starea de încărcare rezultă din însumarea celor două stări ilustrate în figurile 8.8, *b* şi *c*.

În *starea 1* (fig. 8.8, *b*) ambele părți ale învelişului sunt încălzite cu $\Delta T = 60^0\text{C}$ şi solicitate la capete de următoarele momente, conform (8.22):

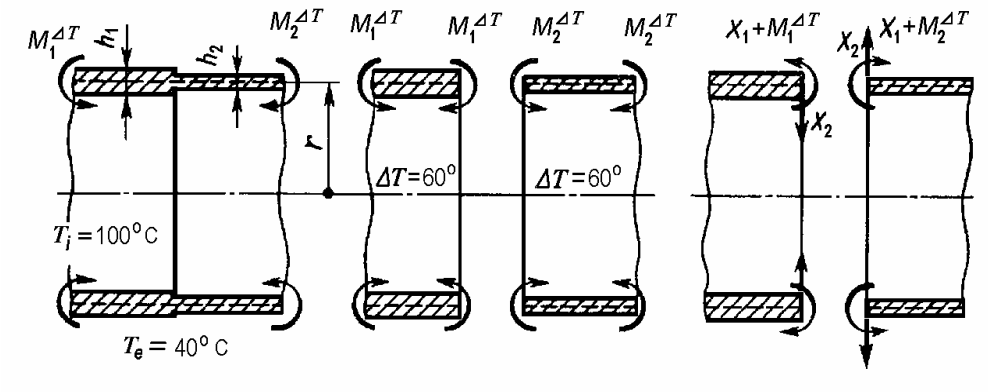
în partea din stânga

$$M_1^{\Delta T} = (1+\nu)\frac{D_1}{h_1}\alpha\,\Delta T = \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}\frac{h_1^2}{12} = 6290\,\text{N mm/mm},$$

în partea din dreapta

$$M_2^{\Delta T} = (1+\nu)\frac{D_2}{h_2}\alpha\,\Delta T = \frac{E\alpha\,\Delta T}{1-\nu}\frac{h_2^2}{12} = 1572\ \text{N mm/mm}.$$

Ambele părți se consideră de lungime inifinită şi cu deformații nule.



a *b* *c*

Fig. 8.8

În *starea 2* (fig. 8.8, *c*) învelişul este încărcat doar cu eforturi aplicate în secțiunea de separare, unde X_1 şi X_2 sunt eforturi static nedeterminate, iar $M_1^{\Delta T}$ şi $M_2^{\Delta T}$ sunt alese astfel încât să compenseze momentele aplicate în starea 1.

Pentru determinarea eforturilor X_1 şi X_2 este suficient să se analizeze doar starea 2. Se scriu condițiile de compatibilitate a deformațiilor celor două părți de înveliş. Deformațiile radiale trebuie să fie egale, $w_{01} = w_{02}$; la fel unghiurile de rotire ale normalelor trebuie să fie aceleaşi, $\varphi_{01} = -\varphi_{02}$. În ultima egalitate semnul minus apare deoarece orientarea axei *x* este inversă pentru cele două părți de înveliş.

Pentru calculul deformațiilor se utilizează relațiile (8.43) şi (8.44).

Pentru partea din stânga a învelişului, la $x = 0$, $\overline{w} = 0$,

$$M_0 = X_1 + M_2^{\Delta T}, \qquad Q_0 = -X_2,$$

$$w_{01} = \frac{X_1 + M_1^{\Delta T}}{2D_1\beta_1^2} - \frac{X_2}{2D_1\beta_1^3}, \quad \varphi_{01} = -\frac{X_1 + M_1^{\Delta T}}{D_1\beta_1} + \frac{X_2}{2D_1\beta_1^2}.$$

Analog, pentru partea din dreapta, la $x = 0$, $\overline{w} = 0$,

$$M_0 = X_1 + M_2^{\Delta T}, \qquad Q_0 = X_2,$$

$$w_{02} = \frac{X_1 + M_2^{\Delta T}}{2D_2\beta_2^2} + \frac{X_2}{2D_2\beta_2^3}, \quad \varphi_{02} = -\frac{X_1 + M_2^{\Delta T}}{D_2\beta_2} - \frac{X_2}{2D_2\beta_2^2}.$$

Înlocuind în ecuațiile de compatibilitate a deformațiilor și ținând seama că

$$D_1 = \frac{E\,h_1^3}{12\,(1-\nu^2)} = 1{,}468\cdot 10^8\ \mathrm{N\,mm},$$

$$D_2 = \frac{E\,h_2^3}{12\,(1-\nu^2)} = \frac{D_1}{8} = 0{,}1833\cdot 10^8\ \mathrm{N\,mm},$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{3\left(1-\nu^2\right)}{r^2 h_1^2}} = 0{,}01285\ \mathrm{mm^{-1}},$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{\frac{3\left(1-\nu^2\right)}{r^2 h_2^2}} = \sqrt{2}\,\beta_1 = 0{,}01813\ \mathrm{mm^{-1}},$$

$$M_1^{\Delta T} = 6290\ \mathrm{N\,mm/mm}, \quad M_2^{\Delta T} = \frac{1}{4}M_1^{\Delta T} = 1572\ \mathrm{N\,mm/mm},$$

se obține sistemul de ecuații

$$3X_1 + \left(2\sqrt{2}+1\right)\frac{X_2}{\beta_1} = 0,$$

$$\left(4\sqrt{2}+1\right)X_1 + \frac{3}{2}\frac{X_2}{\beta_1} = -\left(4\sqrt{2}+4\right)M_2^{\Delta T},$$

de unde rezultă eforturile static nedeterminate

$$X_1 = -2770\ \mathrm{N\,mm/mm}, \quad X_2 = 27{,}9\ \mathrm{N/mm}.$$

În continuare, pe baza relațiilor (8.43)-(8.48) se calculează deformațiile și eforturile interioare pentru starea 2. Adunându-le apoi cu cele calculate pentru starea 1 se obțin valorile pentru starea dată (fig. 8.9).

Punctul în care apare tensiunea maximă este situat pe suprafața exterioară a părții mai subțiri, lângă secțiunea cu salt de grosime. În acest punct eforturile sunt

$$M_x = -2770\ \mathrm{N\,mm/mm}, \quad M_t = -1920\ \mathrm{N\,mm/mm},$$

$$N_x = 0, \quad N_t = -111\ \mathrm{N/mm},$$

iar tensiunile termice au valorile

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h_2^2} = 166{,}2 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$\sigma_t = \frac{N_t}{h_2} + \frac{6M_t}{h_2^2} = 126{,}3 \text{ N/mm}^2 .$$

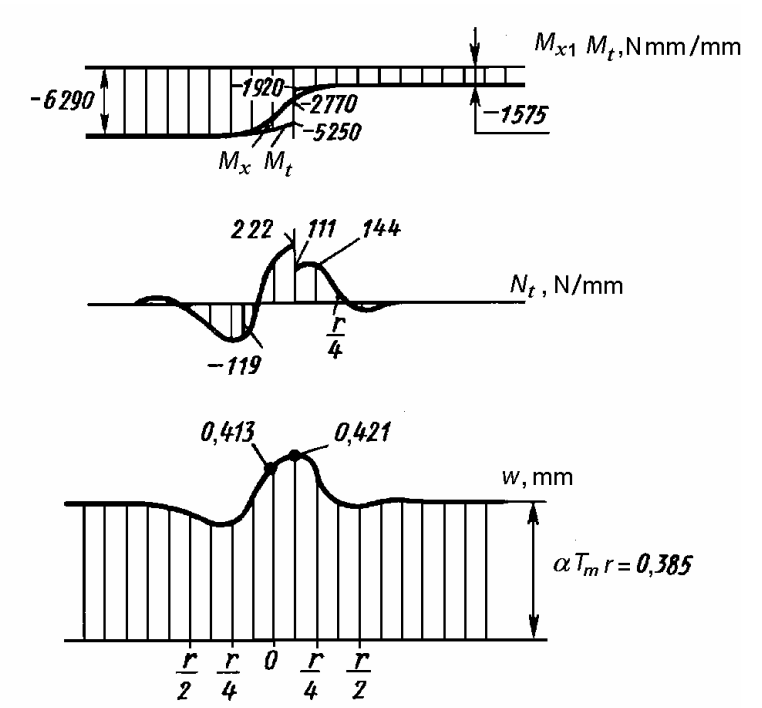


Fig. 8.9

La distanță de secțiunea cu saltul de grosime, în înveliş acționează momentele încovoietoare $M_1^{\Delta T}$ şi $M_2^{\Delta T}$, care produc tensiunile

$$\sigma_x = \sigma_t = 94{,}3 \text{ N/mm}^2 .$$

Deplasarea radială la distanță mare de îmbinare este (fig. 8.9)

$$w = \varepsilon_t r = \alpha T_m r = 0{,}385 \text{ mm} ,$$

în timp ce în punctul cu tensiuni maxime este

$$w_{\max} = 0{,}421 \text{ mm} .$$

9.
ANALIZA CU ELEMENTE FINITE

Structura reală, supusă la variații de temperatură, se înlocuiește cu un model în care deformațiile termice sunt blocate și în care se aplică forțe termoelastice echivalente la nodurile rețelei de discretizare. Echivalarea nodală a acestor forțe se face urmând aceleaşi reguli ca pentru sarcinile exterioare, deci depinde de alegerea funcțiilor de formă care definesc elementul finit.

Forțele termice se asamblează în vectorul forțelor nodale. Cunoscând matricea de rigiditate globală, se calculează deplasările nodale. Pe baza acestora, pentru fiecare element finit, se determină alungirile specifice şi apoi tensiunile.

Dacă asupra structurii, în afara sarcinilor termice acționează şi sarcini mecanice, se obțin tensiunile combinate termice şi mecanice.

În acest capitol se consideră că studentul este familiarizat cu procedurile şi detaliile de aplicare ale metodei elementelor finite, insistând asupra particularităților care apar în considerarea efectelor termoelastice.

9.1 Metoda elementelor finite

Metoda elementelor finite (MEF) implică discretizarea structurii în mai multe *elemente*, conectate între ele la noduri. În cadrul fiecărui element, câmpul de deplasări este *aproximat* prin interpolare polinomială, bazată pe valorile deplasărilor nodale. Prin interconectarea elementelor, câmpul de deplasări este interpolat în întreaga structură printr-un număr de funcții polinomiale definite la nivelul elementelor.

Valorile deplasărilor nodale care corespund echilibrului sunt cele care minimizează energia potențială totală. Procesul de minimizare conduce la un sistem de ecuații algebrice simultane în deplasările nodale. Prin rezolvarea sistemului se obțin deplasările nodale. În continuare, pentru fiecare element, se calculează deformațiile specifice produse de aceste deplasări şi, în final, tensiunile corespunzătoare.

9.1.1 Discretizarea

Structura este împărțită în elemente finite (fig. 9.1) care constituie rețeaua de discretizare. Elementele sunt definite prin coordonatele nodale, funcțiile de formă şi unele proprietăți fizice.

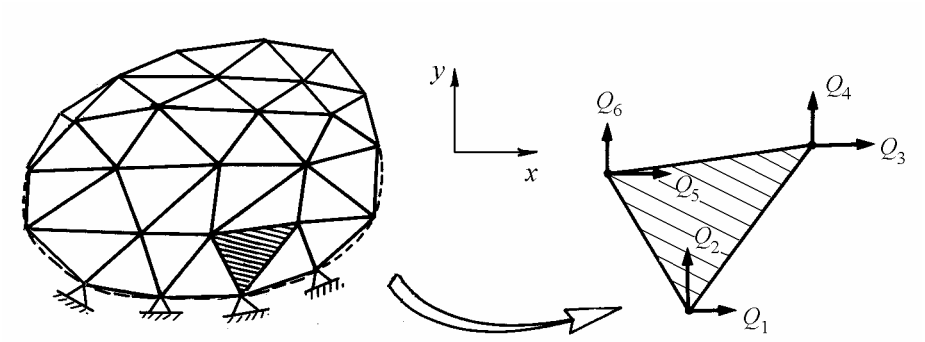


Fig.9.1

Întrucât metoda operează cu mărimi calculate în nodurile rețelei de discretizare (temperaturi nodale, deplasări nodale, forțe nodale echivalente), pentru calculul tensiunilor termice se poate utiliza acelaşi model cu elemente finite ca pentru calculul temperaturilor nodale, aplicând forțele termoelastice, de blocare a deplasărilor termice ale nodurilor, ca forțe exterioare în nodurile rețelei.

9.1.2 Funcțiile de formă

Pentru fiecare element finit, câmpul de deplasări este exprimat în funcție de deplasările nodale prin funcții de interpolare, numite funcții de formă

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lfloor N_u \rfloor & 0 & 0 \\ 0 & \lfloor N_v \rfloor & 0 \\ 0 & 0 & \lfloor N_w \rfloor \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_u^e \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_v^e \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_w^e \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}, \tag{9.1}$$

sau

$$\{u\} = [N]\{Q^e\}, \tag{9.2}$$

unde $[N]$ este matricea *funcțiilor de formă* şi $\{Q^e\}$ este vectorul deplasărilor nodale ale elementului.

Alegerea corespunzătoare a funcțiilor de formă asigură continuitatea câmpului de deplasări pentru întreaga structură. La elementele *conforme* aceasta este asigurată nu numai la noduri, ci şi în lungul laturilor (nu se admit suprapuneri sau goluri).

9.1.3 Compatibilitatea deformațiilor specifice cu deplasările nodale

Rezumând expunerea la starea plană de tensiuni, relațiile de compatibilitate între deformații specifice şi deplasări (4.23) se scriu sub forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix},$$

sau condensat

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} \tag{9.3}$$

unde $[\partial]$ este matricea operatorilor diferențiali.

Înlocuind forma bidimensională a relației (9.2) în (9.3), rezultă

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{Q^e\} = [B]\{Q^e\}, \tag{9.4}$$

unde $[B]$ este matricea derivatelor *funcțiilor de formă*.

9.1.4 Energia de deformație

La materiale elastice liniare, energia de deformație specifică (pe unitatea de volum) este

$$U_0 = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}) = \frac{1}{2}(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\})^T\{\sigma\}, \tag{9.5}$$

unde vectorul tensiunilor (4.53) este

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}), \tag{9.6}$$

în care $[D]$ este matricea de rigiditate a materialului (4.54).

Înlocuind (9.6) în (9.5) rezultă

$$U_0 = \frac{1}{2}(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\})^T[D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}). \tag{9.7}$$

Pentru un corp elastic, energia de deformație totală este

$$U = \int_V U_0 \, \mathrm{d}V \, ,$$

sau, înlocuind (9.7)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} \right)^T [D] \left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} \right) \mathrm{d}V \, . \tag{9.8}$$

Relația (9.8) se mai scrie

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} - 2 \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_T\} + \{\varepsilon_T\}^T [D] \{\varepsilon_T\} \right) \mathrm{d}V \, . \tag{9.9}$$

9.1.5 Vectorul forțelor termoelastice

În continuare se consideră energia de deformație a unui element

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \, \mathrm{d}V - \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_T\} \, \mathrm{d}V + \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon_T\}^T [D] \{\varepsilon_T\} \, \mathrm{d}V \, .$$

Utilizând relația între deformații specifice şi deplasările nodale (9.4)

$$\{\varepsilon\} = [B] \left\{ Q^e \right\},$$

expresia (9.9) devine

$$\begin{aligned} U^e = & \frac{1}{2} \int_{V_e} \left\{ Q^e \right\}^T [B]^T [D] [B] \left\{ Q^e \right\} \mathrm{d}V - \\ & - \int_{V_e} \left\{ Q^e \right\}^T [B]^T [D] \{\varepsilon_T\} \, \mathrm{d}V + \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon_T\}^T [D] \{\varepsilon_T\} \, \mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Ultimul termen din (9.10) este constant şi nu intervine în procesul de minimizare a energiei potențiale totale, care conduce la ecuațiile de echilibru.

Primul termen din membrul drept are forma

$$U_F^e = \frac{1}{2} \left\{ Q^e \right\}^T \int_{V_e} [B]^T [D] [B] \, \mathrm{d}V \left\{ Q^e \right\} = \frac{1}{2} \left\{ Q^e \right\}^T \left[K^e \right] \left\{ Q^e \right\} \tag{9.11}$$

unde

$$\left[K^e\right]=\int_{V_e}\left[B\right]^T\left[D\right]\left[B\right]\,\mathrm{d}V \tag{9.12}$$

este *matricea de rigiditate* a elementului.

Al doilea termen din membrul drept are forma

$$U_T^e=-\left\{Q^e\right\}^T\int_{V_e}\left[B\right]^T\left[D\right]\left\{\varepsilon_T\right\}\mathrm{d}V=-\left\{Q^e\right\}^T\left\{F_T^e\right\} \tag{9.13}$$

unde

$$\left\{F_T^e\right\}=\int_{V_e}\left[B\right]^T\left[D\right]\left\{\varepsilon_T\right\}\mathrm{d}V \tag{9.14}$$

este *vectorul forțelor termoelastice* coerente.

Se observă că expresia (9.13) are forma potențialului forțelor exterioare, egal cu lucrul mecanic al forțelor exterioare luat cu semn schimbat.

Rezultă că efectul câmpului de temperaturi poate fi considerat aplicând forțele termice echivalente (9.14) în nodurile rețelei de discretizare.

9.1.6 Ecuațiile de echilibru

În absența sarcinilor exterioare, energia potențială totală este egală cu energia de deformație.

La sisteme conservative, conform principiului minimului energiei potențiale totale, dintre toate câmpurile de deplasări cinematic admisibile, cel care satisface echilibrul (la noduri) corespunde unei valori minime a energiei potențiale totale. Considerând un singur element, condiția se mai scrie

$$\frac{\partial U^e}{\partial\left\{Q^e\right\}}=0\,,\quad \frac{\partial U_F^e}{\partial\left\{Q^e\right\}}+\frac{\partial U_T^e}{\partial\left\{Q^e\right\}}=0\,, \tag{9.15}$$

în care

$$\frac{\partial U_F^e}{\partial\left\{Q^e\right\}}=\left[K^e\right]\left\{Q^e\right\},\quad \frac{\partial U_T^e}{\partial\left\{Q^e\right\}}=-\left\{F_T^e\right\}. \tag{9.16}$$

În absența sarcinilor exterioare, condiția de echilibru este

$$\left[K^e\right]\left\{Q^e\right\}=\left\{F_T^e\right\}. \tag{9.17}$$

Dacă există şi sarcini exterioare, condiția de echilibru este

$$\left[K^e\right]\left\{Q^e\right\}=\left\{F_M^e\right\}+\left\{F_T^e\right\}=\left\{F^e\right\}. \tag{9.18}$$

9.1.7 Asamblarea matricii globale de rigiditate şi a vectorului global al forțelor nodale

Elementele individuale sunt asamblate împreună astfel încât deplasările să fie continue pe laturile elementelor şi condițiile la limită să fie satisfăcute.

Conectivitatea cinematică se exprimă prin relații între deplasările nodale ale fiecărui element şi deplasările globale

$$\left\{Q^e\right\}=\left[\tilde{T}^e\right]\left\{\overline{Q}\right\}, \tag{9.19}$$

unde $\left\{\overline{Q}\right\}$ este vectorul deplasărilor nodale ale întregii structuri iar $\left[\tilde{T}^e\right]$ este o *matrice de conectivitate* (de localizare) care are elemente egale cu 1 la gradele de libertate ale nodurilor şi zerouri în rest.

Prin asamblarea matricilor de rigiditate şi a vectorilor forțelor nodale se obțin ecuațiile de echilibru globale nereduse

$$\left[\overline{K}\right]\left\{\overline{Q}\right\}=\left\{\overline{F}\right\}, \tag{9.20}$$

unde matricea de rigiditate globală este egală cu suma matricilor de rigiditate expandate ale elementelor

$$\left[\overline{K}\right]=\sum_e\left[\tilde{T}^e\right]^T\left[K^e\right]\left[\tilde{T}^e\right] \tag{9.21}$$

iar vectorul forțelor nodale globale este egal cu suma vectorilor expandați ai forțelor nodale ale elementelor

$$\left\{\overline{F}\right\}=\sum_e\left[\tilde{T}^e\right]^T\left\{F^e\right\}. \tag{9.22}$$

Aplicând condițiile la limită, se obțin ecuațiile de echilibru condensate

$$\left[K\right]\left\{Q\right\}=\left\{F\right\}. \tag{9.23}$$

Procedura expusă mai sus nu este utilizată ca atare în programele de calcul, unde asamblarea se face direct, plasând elementele matricii de rigiditate şi ale vectorului forțelor nodale direct în locațiile respective, pe baza conectivității elementelor.

9.1.8 Calculul tensiunilor

După rezolvarea sistemului liniar de ecuații (9.23) în funcție de deplasările nodale, tensiunile se calculează pentru fiecare element cu relația (9.6)

$$\{\sigma\} = [D]\left([B]\{Q^e\} - \{\varepsilon_T\}\right). \qquad (9.24)$$

9.2 Calculul tensiunilor termice prin MEF

În analiza cu elemente finite, tensiunile termice se calculează urmând procedura descrisă mai jos, valabilă pentru toate tipurile de elemente finite.

1. Pentru fiecare element supus unei variații de temperatură, se blochează deplasările nodale şi se calculează forțele aplicate de element asupra nodurilor sale datorită variației de temperatură (egale şi de sens contrar forțelor aplicate de noduri asupra elementelor).

2. Se asamblează matricile de rigiditate ale elementelor şi forțele termoelastice echivalente calculate în etapa 1. Rezultatul este o structură discretizată cu elemente finite, deocamdată nedeformată, ale cărei forțe nodale sunt produse de variațiile de temperatură.

3. Se calculează deplasările nodale, deformațiile specifice produse de aceste deplasări şi tensiunile termice corespunzătoare. Procedura este aceeaşi cu cea folosită pentru calculul tensiunilor produse de sarcinile (mecanice) exterioare.

4. Tensiunile calculate în etapa 3 se suprapun cu tensiunile "inițiale" de blocare.

La asamblarea din etapa 2 se pot suprapune sarcini mecanice peste sarcinile termice.

9.3 Structuri plane din bare solicitate axial

În continuare se studiază bare drepte şi sisteme de bare solicitate doar la întindere şi/sau compresiune.

Un caz aparte sunt structurile de tip grindă cu zăbrele, compuse din bare articulate la capete. Principala ipoteză simplificatoare la grinzi cu zăbrele consideră că toate barele sunt conectate prin articulații fără frecare şi nu transmit momente între ele. În practică, asamblarea barelor se face prin nituire, sudare sau cu şuruburi. Totuşi, modelul simplificat cu bare articulate la capete reprezintă o aproximație inginerească surprinzător de bună. Barele articulate la capete pot

prelua doar solicitări de întindere sau compresiune. În programele de analiză cu elemente finite, bara articulată la capete se numeşte *truss*.

La o grindă cu zăbrele, forţele exterioare şi reacţiunile se aplică doar la articulaţii iar barele au rigiditate axială constantă, fiind deci elemente finite naturale. Pentru a ţine cont de orientarea spaţială a barelor, se utilizează coordonate locale şi un sistem de coordonate globale. Matricile de rigiditate ale elementelor şi vectorii forţelor nodale se calculează întâi în coordonate locale, apoi în sistemul de coordonate globale. Matricile şi vectorii definiţi în sistemul global pot fi expandaţi la dimensiunea sistemului şi apoi adunaţi pentru a obţine matricea globală de rigiditate şi vectorul global al forţelor nodale care sunt utilizate în rezolvarea ecuaţiilor de echilibru şi la calculul tensiunilor.

9.3.1 Calcule în coordonate locale

Se consideră un element cu două noduri, articulat la capete, în sistemul de coordonate *local*, cu axa *x* în lungul elementului (fig. 9.2). Nodurile sunt numerotate convenabil 1 şi 2, deplasările nodale sunt q_1, q_2, iar forţele nodale sunt f_1, f_2. Elementul este supus variaţiei de temperatură T_e.

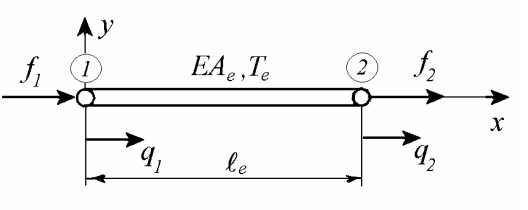


Fig.9.2

Tensiunea axială $\sigma = f/A_e$, unde

$$f = f_2 = -f_1, \tag{9.25}$$

produce alungirea mecanică $\Delta\ell_M$, deci alungirea specifică mecanică este $\varepsilon_M = \Delta\ell_M/\ell_e$. La aceasta se adaugă alungirea din dilatarea liberă $\Delta\ell_T = \ell_e\alpha_e T_e$, deci alungirea specifică termică $\varepsilon_T = \Delta\ell_T/\ell_e = \alpha_e T_e$. Deformaţia specifică totală (2.5) este

$$\varepsilon = \frac{q_2 - q_1}{\ell_e} = \varepsilon_M + \varepsilon_T = \frac{\sigma}{E_e} + \alpha_e T_e, \tag{9.26}$$

unde E_e este modulul de elasticitate şi α_e – coeficientul de dilatare termică liniară ale materialului.

Înmulţind cu $E_e A_e$ se obţine (2.13)

$$\frac{E_e A_e}{\ell_e}\left(q_2 - q_1\right) = \sigma A_e + E_e A_e \alpha_e T_e = f\,. \tag{9.27}$$

Relațiile (9.25) şi (9.27) se scriu matricial sub forma

$$\left\{\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_{1M} \\ f_{2M} \end{array}\right\} + E_e A_e \alpha_e T_e \left\{\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right\} = \frac{E_e A_e}{\ell_e}\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array}\right\}. \tag{9.28}$$

sau

$$\left[k^e\right]\left\{q^e\right\} = \left\{f_M^e\right\} + \left\{f_T^e\right\} = \left\{f^e\right\}, \tag{9.29}$$

unde matricea de rigiditate a elementului este

$$\left[k^e\right] = \frac{E_e A_e}{\ell_e}\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right], \tag{9.30}$$

vectorul forţelor termoelastice

$$\left\{f_T^e\right\} = E_e A_e \alpha_e T_e \left\{\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right\}, \tag{9.31}$$

vectorul forţelor exterioare (mecanice)

$$\left\{f_M^e\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_{1M} \\ f_{2M} \end{array}\right\}, \tag{9.32}$$

iar vectorul deplasărilor nodale în coordonate locale

$$\left\{q^e\right\} = \left\{\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array}\right\}. \tag{9.33}$$

9.3.2 Transformarea din coordonate locale în coordonate globale

În figura 9.3 este reprezentat un element de bară articulată la capete, în poziția inițială şi în poziție deformată. Deplasările nodale sunt notate cu litere mici în sistemul de coordonate local *xOy* şi cu litere mari - în sistemul de coordonate global *XOY*.

În sistemul de coordonate global, fiecare nod are două grade de libertate. Un nod al cărui index global este j are gradele de libertate $2j-1$ şi $2j$, şi deplasările Q_{2j-1} şi Q_{2j}.

În figura 9.3 se observă că deplasarea q_1 este egală cu suma proiecțiilor deplasărilor Q_1 și Q_2 pe axa *x*. Astfel

$$q_1 = Q_1 \cos\theta_e + Q_2 \sin\theta_e . \qquad (9.34, a)$$

Similar

$$q_2 = Q_3 \cos\theta_e + Q_4 \sin\theta_e . \qquad (9.34, b)$$

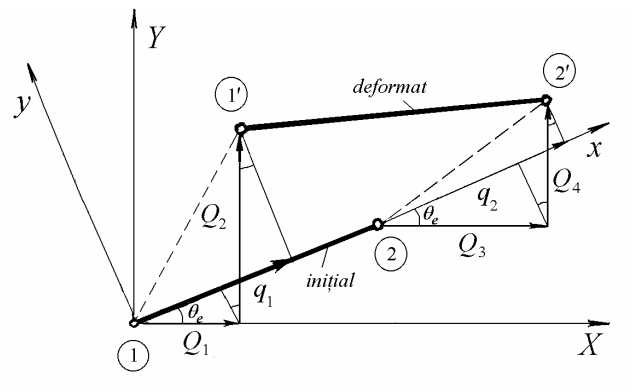


Fig. 9.3

Relațiile (9.34) se pot scrie matricial sub forma

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}^e}_{\text{deplasari locale}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \end{bmatrix}}_{\text{matrice de transformare}} \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}_e}_{\text{deplasari globale}} \qquad (9.35)$$

sau condensat

$$\left\{ q^e \right\} = \left[T^e \right] \left\{ Q^e \right\}, \qquad (9.36)$$

unde

$$\left[T^e \right] = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \end{bmatrix} \qquad (9.37)$$

este o *matrice de transformare*.

În figura 9.4 sunt reprezentate forțele nodale în coordonate locale, f_1 și f_2 , și în coordonate globale, F_1,...., F_4 .

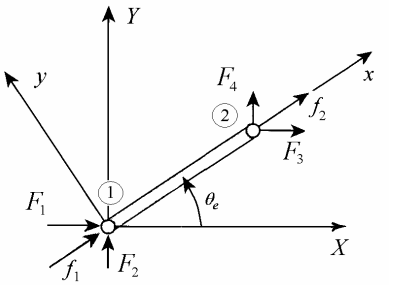


Fig. 9.4

Componentele forțelor în sistemul de coordonate global sunt

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 \cos\theta_e, \qquad F_3 = f_2 \cos\theta_e, \\ F_2 &= f_1 \sin\theta_e, \qquad F_4 = f_2 \sin\theta_e . \end{aligned} \tag{9.38}$$

În formă matricială

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}_e}_{\substack{\text{forte} \\ \text{globale}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta_e & 0 \\ \sin\theta_e & 0 \\ 0 & \cos\theta_e \\ 0 & \sin\theta_e \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrice de} \\ \text{transformare}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_e}_{\substack{\text{forte} \\ \text{locale}}}, \tag{9.39}$$

sau

$$\left\{F^e\right\} = \left[T^e\right]^T \left\{f^e\right\}. \tag{9.40}$$

9.3.3 Matricea de rigiditate în coordonate globale

Înlocuind ecuația (9.29) în (9.40), apoi ecuația (9.36), se obține

$$\left\{F^e\right\} = \underbrace{\left[T^e\right]^T \left[k^e\right] \left[T^e\right]} \left\{Q^e\right\}, \tag{9.41}$$

sau

$$\left\{F^e\right\} = \left[K^e\right] \left\{Q^e\right\} \tag{9.42}$$

unde

$$\left[K^e\right] = \left[T^e\right]^T \left[k^e\right] \left[T^e\right] \tag{9.43}$$

este matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale.

Înlocuind $\left[T^{e}\right]$ din relația (9.37) şi $\left[k^{e}\right]$ din relația (9.30) se obține

$$\left[K^{e}\right]=\frac{E_e A_e}{\ell_e}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}_e , \qquad (9.44)$$

unde s-a notat $c=\cos\theta_e$ şi $s=\sin\theta_e$.

9.3.4 Vectorul forțelor termoelastice în coordonate globale

Din (9.31) şi (9.40) se obține

$$\left\{F^{e}\right\}=\left\{F_M^{e}\right\}+\left\{F_T^{e}\right\}=\left[T^{e}\right]^{T}\left\{f_M^{e}\right\}+E_e A_e \alpha_e T_e \left[T^{e}\right]^{T}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix} \qquad (9.45)$$

de unde rezultă

$$\left\{F_T^{e}\right\}=E_e A_e \alpha_e T_e \begin{bmatrix} \mathrm{c} & 0 \\ \mathrm{s} & 0 \\ 0 & \mathrm{c} \\ 0 & \mathrm{s} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix} = E_e A_e \alpha_e T_e \begin{Bmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{Bmatrix}_e . \qquad (9.46)$$

9.3.5 Asamblarea matricii globale de rigiditate şi a vectorului forțelor nodale

Matricea globală de rigiditate şi vectorul global al forțelor nodale sunt asamblate pe baza matricilor şi vectorilor elementelor, utilizând informația privind conectarea elementelor, aşa cum s-a prezentat în § 9.1.7.

9.3.6 Forțele axiale în bare şi tensiunile

Din (9.28) şi (9.35) se obține vectorul forțelor mecanice

$$\begin{Bmatrix} f_{1_M} \\ f_{2_M} \end{Bmatrix}_e = \frac{E_e A_e}{\ell_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}_e - E_e A_e \alpha_e T_e \begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix} \qquad (9.47)$$

pentru fiecare element, din care se calculează forța axială în bară

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{1_M} \\ f_{2_M} \end{array} \right\}_e = \left\{ \begin{array}{c} -N_e \\ N_e \end{array} \right\}. \tag{9.48}$$

În final, rezultă tensiunile totale

$$\sigma_e = \frac{N_e}{A_e}. \tag{9.49}$$

Exemplul 9.1

Să se calculeze tensiunile termice în bara cu secțiunea variabilă în trepte de la Exemplul 2.4 (fig. 9.5), încălzită uniform cu diferența de temperatură T.

Rezolvare

Se va da o rezolvare analitică, împărțind bara în două elemente finite.

Vectorii forțelor termoelastice (9.31) sunt

$$\left\{ f_T^1 \right\} = EA_1\alpha T \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -EA_1\alpha T \\ EA_1\alpha T \end{array} \right\},$$

$$\left\{ f_T^2 \right\} = EA_2\alpha T \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -EA_2\alpha T \\ EA_2\alpha T \end{array} \right\}.$$

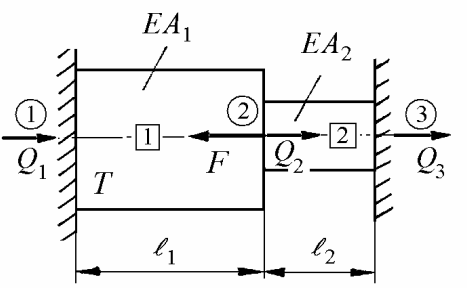


Fig. 9.5

Ecuațiile (9.28) se scriu

$$\frac{EA_1}{\ell_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\left\{ \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{1_M} \\ F_{2_M} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} -EA_1\alpha T \\ EA_1\alpha T \end{array} \right\},$$

$$\frac{EA_2}{\ell_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2_M} \\ F_{3_M} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -EA_2\alpha T \\ EA_2\alpha T \end{Bmatrix}.$$

După asamblare se obține sistemul liniar

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{\ell_1} & -\frac{EA_1}{\ell_1} & 0 \\ -\frac{EA_1}{\ell_1} & \frac{EA_1}{\ell_1}+\frac{EA_2}{\ell_2} & -\frac{EA_2}{\ell_2} \\ 0 & -\frac{EA_2}{\ell_2} & \frac{EA_2}{\ell_2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1_M} \\ F_{2_M} \\ F_{3_M} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -EA_1\alpha T \\ EA_1\alpha T + EA_2\alpha T \\ -EA_2\alpha T \end{Bmatrix}.$$

Condițiile la limită sunt

$$Q_1 = Q_3 = 0\,, \qquad F_{2_M} = -F\,.$$

Eliminând prima şi a treia ecuație, se obține

$$\left(\frac{EA_1}{\ell_1}+\frac{EA_2}{\ell_2}\right)Q_2 = -F + EA_1\alpha T + EA_2\alpha T$$

de unde rezultă deplasarea

$$Q_2 = \frac{E\alpha T\left(A_1 - A_2\right) - F}{E\left(\frac{A_1}{\ell_1}+\frac{A_2}{\ell_2}\right)}.$$

Forțele axiale mecanice în elemente sunt (9.27)

$$N_M^1 = \frac{EA_1}{\ell_1}Q_2 - EA_1\alpha T\,, \qquad N_M^2 = -\frac{EA_2}{\ell_2}Q_2 - EA_2\alpha T\,.$$

Tensiunile totale sunt

$$\sigma_1 = \frac{N_M^1}{A_1}\,, \qquad \sigma_2 = \frac{N_M^2}{A_2}\,.$$

Rezultatele coincid cu cele de la Exemplul 2.4.

Exemplul 9.2

Se cer tensiunile în barele sistemului din figura 9.6, dacă bara verticală este încălzită cu T. Se dau: $\ell_1 = 2\,\text{m}$, $\ell_2 = 2{,}5\,\text{m}$, $A = 400\,\text{mm}^2$, $E = 200\,\text{GPa}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$, $T = 40^{\text{o}}\text{C}$.

Rezolvare

Deplasările nodale se notează $Q_1,...,Q_6$ ca în figura 9.6.

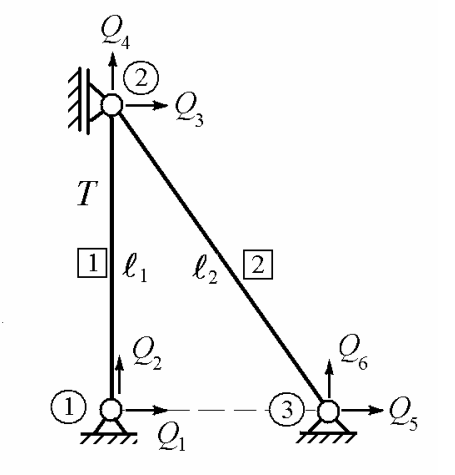


Fig. 9.6

Se calculează $\dfrac{EA}{\ell_1} = 40\,000$, $\dfrac{EA}{\ell_2} = 32\,000$, $EA\alpha T = 38\,400$.

La *elementul 1*, $\theta_1 = 90^{\text{o}}$, $\cos\theta_1 = 0$, $\sin\theta_1 = 1$. Matricea de rigiditate a elementului (9.44) este

$$\left[K^1\right] = 40\,000 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iar vectorul forțelor termoelastice (9.46) este

$$\left\{F_T^1\right\} = 38\,400 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

La *elementul 2*, $\theta_2 = -53{,}13^{\text{o}}$, $\cos\theta_2 = 0{,}6$, $\sin\theta_2 = -0{,}8$. Matricea de rigiditate a elementului este

$$\left[K^{2}\right]=32\,000\begin{bmatrix}0{,}36 & -0{,}48 & -0{,}36 & 0{,}48\\ -0{,}48 & 0{,}64 & 0{,}48 & -0{,}64\\ -0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}36 & -0{,}48\\ 0{,}48 & -0{,}64 & -0{,}48 & 0{,}64\end{bmatrix},$$

iar vectorul forțelor termoelastice este nul, bara nefiind încălzită

$$\left\{F_T^2\right\}=\left\{0\right\}.$$

După asamblarea matricii globale de rigiditate și vectorului global al forțelor nodale, se obține sistemul de ecuații neredus

$$32\,000\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1{,}25 & 0 & -1{,}25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}36 & -0{,}48 & -0{,}36 & 0{,}48\\ 0 & -1{,}25 & -0{,}48 & 1{,}89 & 0{,}48 & -0{,}64\\ 0 & 0 & -0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}36 & -0{,}48\\ 0 & 0 & 0{,}48 & -0{,}64 & -0{,}48 & 0{,}64\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5\\ Q_6\end{Bmatrix}=38400\begin{Bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Înlocuind condițiile la limită

$$Q_1=Q_2=Q_3=Q_5=Q_6,$$

rezultă o singură ecuație

$$32\,000\cdot 1{,}89\cdot Q_4=38\,400$$

deci singura deplasare nenulă

$$Q_4=0{,}635\,\text{mm}.$$

Pentru fiecare element se calculează vectorul forțelor mecanice (9.47).

Pentru *elementul 1*

$$\begin{Bmatrix}f_{1_M}\\ f_{2_M}\end{Bmatrix}=40\,000\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0{,}635\end{Bmatrix}-38400\begin{Bmatrix}-1\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}13000\\ -13000\end{Bmatrix}.$$

Rezultă tensiunile în bara 1

$$\sigma_1=-\frac{13000}{400}=-32{,}5\,\text{MPa}.$$

Pentru *elementul 2*

$$\begin{Bmatrix} f_{1_M} \\ f_{2_M} \end{Bmatrix} = 32\,000 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}635 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16\,256 \\ 16\,256 \end{Bmatrix}.$$

Rezultă tensiunile în bara 2

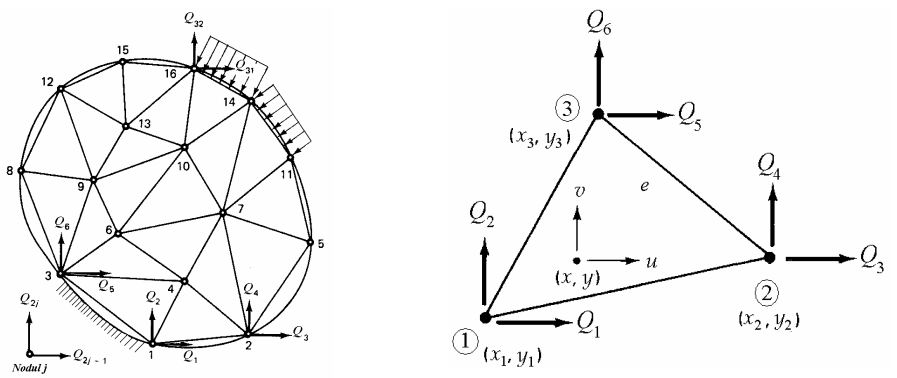
$$\sigma_2 = \frac{16\,256}{400} = 40{,}64\,\text{MPa}\,.$$

9.4 Plăci subțiri cu sarcini coplanare

Cel mai simplu element finit pentru modelarea stărilor plane de tensiuni sau de deformații specifice în elemente plane solicitate de sarcini coplanare este *triunghiul cu deformații specifice constante*, cunoscut sub prescurtarea în limba engleză *CST* (*constant strain triangle*).

9.4.1 Modelarea cu elemente CST

Elementul CST are trei noduri şi laturi rectilinii. La elementul izolat din figura 9.7, *b* , nodurile se numerotează convenabil (local) 1, 2, 3, în sens trigonometric. Geometria elementului este definită de coordonatele nodale x_i , y_i $\left(i = 1,2,3\right)$.



a *b*

Fig. 9.7

Fiecare nod are două grade de libertate – deplasările în direcțiile *x* şi *y*.

Vectorul deplasărilor nodale ale elementului este

$$\left\{ Q^e \right\} = \lfloor Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \rfloor^T . \tag{9.50}$$

Câmpul de deplasări este definit prin interpolare față de deplasările nodale

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} \tag{9.51}$$

sau

$$\{u\} = [N] \left\{ Q^e \right\}. \tag{9.52}$$

În (9.51) funcţiile de formă au expresiile

$$N_i = \frac{1}{2A} \left(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y \right), \qquad \left(i = 1, 2, 3 \right) \tag{9.53}$$

unde

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j , \quad \beta_i = y_j - y_k , \quad \gamma_i = x_k - x_j \tag{9.54}$$

iar aria triunghiului

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[\left(x_2 y_3 - x_3 y_2 \right) + \left(x_3 y_1 - x_1 y_3 \right) + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1 \right) \right]. \tag{9.55}$$

În (9.55) determinantul este pozitiv dacă nodurile sunt numerotate în sens trigonometric.

9.4.2 Matricea $[B]$

Deformaţiile specifice se exprimă în funcţie de deplasările nodale prin relaţia (9.4)

$$\{\varepsilon\} = [\partial] [N] \left\{ Q^e \right\} = [B] \left\{ Q^e \right\},$$

în care matricea derivatelor funcţiilor de formă este

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0\\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3\\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3\end{bmatrix}, \tag{9.56}$$

sau

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0\\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_1\\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2\end{bmatrix}. \tag{9.57}$$

Se observă că matricea este o constantă pentru un element finit dat.

9.4.3 Matricea de rigiditate a elementului

Matricea de rigiditate a elementului (9.12) este

$$\left[K^e\right]=\int_{V_e}[B]^T[D][B]\,\mathrm{d}V=[B]^T[D][B]\,t^eA \tag{9.58}$$

unde t^e este grosimea elementului iar $[D]$ este matricea de rigiditate a materialului, dată de (4.56) pentru o stare plană de tensiuni, şi de (4.58) pentru o stare plană de deformații specifice.

9.4.4 Vectorul forțelor termoelastice al elementului

Vectorul forțelor termoelastice (9.14) este

$$\left\{F_T^e\right\}=\int_{V_e}[B]^T[D]\{\varepsilon_T\}\,\mathrm{d}V=[B]^T[D]\{\varepsilon_T\}\,t^eA. \tag{9.59}$$

Pentru o stare plană de tensiuni

$$\{\varepsilon_T\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x_T}\\ \varepsilon_{y_T}\\ \gamma_{xy_T}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\alpha T\\ \alpha T\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{9.60}$$

Pentru o stare plană de deformații specifice

$$\{\varepsilon_T\}=(1+\nu)\begin{Bmatrix}\alpha T\\ \alpha T\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{9.61}$$

Pentru o stare plană de tensiuni, expresia (9.59) devine

$$\left\{F_T^e\right\}=\frac{E\alpha T t^e}{2(1-\nu)}\lfloor \beta_1 \quad \gamma_1 \quad \beta_2 \quad \gamma_2 \quad \beta_3 \quad \gamma_3 \rfloor^T . \tag{9.62}$$

9.4.5 Asamblarea matricii globale de rigiditate şi a vectorului forţelor nodale

Matricea globală de rigiditate şi vectorul global al forţelor nodale sunt asamblate pe baza matricilor şi vectorilor elementelor, utilizând informaţia privind conectarea elementelor, aşa cum s-a prezentat în § 9.1.7.

9.4.6 Calculul tensiunilor

Din relaţia (9.24) rezultă vectorul tensiunilor pentru fiecare element. În cazul unei stări plane de tensiuni se obţine

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0\\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3\\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5\\ Q_6\end{Bmatrix}-$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha T\\ \alpha T\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{9.63}$$

Exemplul 9.3

O placă pătrată de grosime $t=5$ mm şi laturi $a=500$ mm este încastrată în lungul unei laturi şi liberă pe celelalte trei laturi (fig. 9.8). Se dau $E=210$ GPa, $\alpha=12\cdot10^{-6}\,\text{grd}^{-1}$ şi $\nu=0{,}3$. Se cer tensiunile termice produse de o încălzire cu $T=50^{o}\text{C}$ (Craddock, 2006).

Rezolvare

Placa este împărţită în patru elemente CST. Se adoptă numerotarea nodurilor şi a elementelor din figura 9.8.

Aria elementelor este $A = 0{,}0625\ \mathrm{m}^2$.

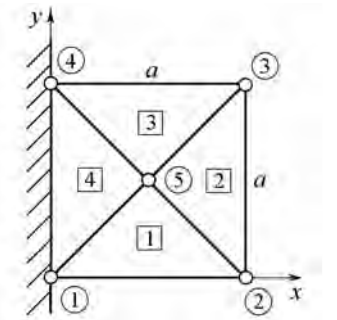


Fig. 9.8

Matricea $[D]$ este

$$[D] = \frac{2{,}1\cdot 10^{11}}{1-0{,}3^2}\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}35 \end{bmatrix} = 10^{11}\begin{bmatrix} 2{,}3077 & 0{,}6923 & 0 \\ 0{,}6923 & 2{,}3077 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8077 \end{bmatrix}.$$

Elementul 1

Coordonatele nodurilor sunt

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}5,\ x_5 = 0{,}25,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_5 = 0{,}25.$$

Matricea $[B]$ (9.57) are forma

$$[B] = \frac{1}{0{,}125}\begin{bmatrix} -0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0 & -0{,}25 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate (9.58) este

$$[K^1] = 10^9\begin{bmatrix} 0{,}3894 & 0{,}1875 & -0{,}1875 & -0{,}0144 & -0{,}2019 & -0{,}1731 \\ & 0{,}3894 & 0{,}0144 & 0{,}1875 & -0{,}2019 & -0{,}5769 \\ & & 0{,}3894 & -0{,}1875 & -0{,}2019 & 0{,}1731 \\ & & & 0{,}3894 & 0{,}2019 & -0{,}5769 \\ & \text{sim} & & & 0{,}4038 & 0 \\ & & & & & 1{,}1538 \end{bmatrix}.$$

Vectorul forțelor termoelastice nodale (9.62) este

$$\left\{F_T^1\right\}=\frac{2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 12\cdot 10^{-6}\cdot 50\cdot 5\cdot 10^{-3}}{2\left(1-0{,}3\right)}\left\lfloor -0{,}25\ \ -0{,}25\ \ 0{,}25\ \ -0{,}25\ \ 0\ \ 0{,}5\right\rfloor^T,$$

$$\left\{F_T^1\right\}=112500\left\lfloor -1\ \ -1\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 2\right\rfloor^T.$$

Elementul 2

Coordonatele nodurilor sunt

$$x_2=0{,}5,\ x_3=0{,}5,\ x_5=0{,}25,\ y_2=0,\ y_3=0{,}5,\ y_5=0{,}25.$$

Matricea $\left[B\right]$ are forma

$$\left[B\right]=\frac{1}{0{,}125}\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate se scrie

$$\left[K^2\right]=10^9\begin{bmatrix} 0{,}3894 & -0{,}1875 & 0{,}1875 & -0{,}0144 & -0{,}5769 & 0{,}2019 \\ & 0{,}3894 & 0{,}0144 & -0{,}1875 & 0{,}1731 & -0{,}2019 \\ & & 0{,}3894 & 0{,}1875 & -0{,}5769 & -0{,}2019 \\ & & & 0{,}3894 & -0{,}1731 & -0{,}2019 \\ & \text{sim} & & & 1{,}1538 & 0 \\ & & & & & 0{,}4038 \end{bmatrix}.$$

Vectorul forțelor termoelastice nodale este

$$\left\{F_T^2\right\}=112500\left\lfloor 1\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ -2\ \ 0\right\rfloor^T.$$

Elementul 3

Coordonatele nodurilor sunt

$$x_3=0{,}5,\ x_4=0,\ x_5=0{,}25,\ y_3=0{,}5,\ y_4=0{,}5,\ y_5=0{,}25.$$

Matricea $\left[B\right]$ are forma

$$\left[B\right]=\frac{1}{0{,}125}\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & -0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate este

$$\left[K^3\right]=10^9\begin{bmatrix} 0{,}3894 & 0{,}1875 & -0{,}1875 & -0{,}0144 & -0{,}2019 & -0{,}1731 \\ & 0{,}3894 & 0{,}0144 & 0{,}1875 & -0{,}2019 & -0{,}5769 \\ & & 0{,}3894 & -0{,}1875 & -0{,}2019 & 0{,}1731 \\ & & & 0{,}3894 & 0{,}2019 & -0{,}5769 \\ & \text{sim} & & & 0{,}4038 & 0 \\ & & & & & 1{,}1538 \end{bmatrix}.$$

Vectorul forțelor termoelastice nodale se scrie

$$\left\{F_T^3\right\}=112500\left\lfloor 1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -2\right\rfloor^T.$$

Elementul 4

Coordonatele nodurilor sunt

$$x_4=0,\; x_1=0,\; x_5=0{,}25,\; y_4=0{,}5,\; y_1=0,\; y_5=0{,}25.$$

Matricea $\left[B\right]$ se scrie

$$\left[B\right]=\frac{1}{0{,}125}\begin{bmatrix} -0{,}25 & 0 & -0{,}25 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0 & -0{,}25 & 0 & 0 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate este

$$\left[K^4\right]=10^9\begin{bmatrix} 0{,}3894 & -0{,}1875 & 0{,}1875 & -0{,}0144 & -0{,}5769 & 0{,}2019 \\ & 0{,}3894 & 0{,}0144 & -0{,}1875 & 0{,}1731 & -0{,}2019 \\ & & 0{,}3894 & 0{,}1875 & -0{,}5769 & -0{,}2019 \\ & & & 0{,}3894 & -0{,}1731 & -0{,}2019 \\ & \text{sim} & & & 1{,}1538 & 0 \\ & & & & & 0{,}4038 \end{bmatrix}.$$

Vectorul forțelor termoelastice nodale se scrie

$$\left\{F_T^4\right\}=112500\left\lfloor -1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 2 \;\; 0\right\rfloor^T.$$

Condițiile la limită sunt

$$Q_1=Q_2=Q_7=Q_8=0.$$

Matricea de rigiditate globală redusă este

$$[K]=10^9\begin{bmatrix} 0,7788 & -0,3750 & 0,1875 & -0,0144 & -0,7788 & 0,3750 \\ & 0,7788 & 0,0144 & -0,1875 & 0,3750 & -0,7788 \\ & & 0,7788 & 0,3750 & -0,7788 & -0,3750 \\ & & & 0,7788 & -0,3750 & -0,7788 \\ & \text{sim} & & & 3,1154 & 0 \\ & & & & & 3,1154 \end{bmatrix}.$$

Vectorul global redus al forțelor termoelastice nodale este

$$\{F_T\}=225000\lfloor 1\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\rfloor^T.$$

Rezolvând sistemul redus al ecuațiilor de echilibru se obțin deplasările nodale (m). Vectorul expandat al deplasărilor nodale globale este

$$\{\overline{Q}\}=10^{-3}\lfloor 0\ \ 0\ \ 0,3327\ \ -0,1911\ \ 0,3327\ \ 0,1911\ \ 0\ \ 0\ \ 0,2123\ \ 0\rfloor^T.$$

Tensiunile $\left(\mathrm{N}/\mathrm{m}^2\right)$ se calculează cu relația (9.63).

Elementul 1

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_1=10^8\begin{Bmatrix}1,8001\\ 1,3427\\ -0,1602\end{Bmatrix}-10^8\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,8\\ 0\end{Bmatrix}=10^7\begin{Bmatrix}0,0014\\ -4,5734\\ -1,6025\end{Bmatrix}.$$

Elementul 2

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_2=10^8\begin{Bmatrix}1,6406\\ 2,0974\\ 0\end{Bmatrix}-10^8\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,8\\ 0\end{Bmatrix}=10^7\begin{Bmatrix}-1,5942\\ 2,9742\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Elementul 3

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_3=10^8\begin{Bmatrix}1,8001\\ 1,3427\\ 0,1602\end{Bmatrix}-10^8\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,8\\ 0\end{Bmatrix}=10^7\begin{Bmatrix}0,0014\\ -4,5734\\ 1,6025\end{Bmatrix}.$$

Elementul 4

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_4=10^8\begin{Bmatrix}1,9597\\ 0,5879\\ 0\end{Bmatrix}-10^8\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,8\\ 0\end{Bmatrix}=10^7\begin{Bmatrix}0,1597\\ -1,2121\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Tensiunea maximă este $45,73\,\mathrm{N}/\mathrm{mm}^2$.

9.5 Structuri axial-simetrice încărcate simetric

Calculul corpurilor tridimensionale axial-simetrice solicitate de sarcini şi/sau câmpuri termice axial-simetrice (fig. 9.9) se reduce la probleme bidimensionale, în care nu mai intervine unghiul de rotaţie în jurul axei de simetrie. În acest fel, problema se reduce la studiul suprafeţei generatoare în rotaţie.

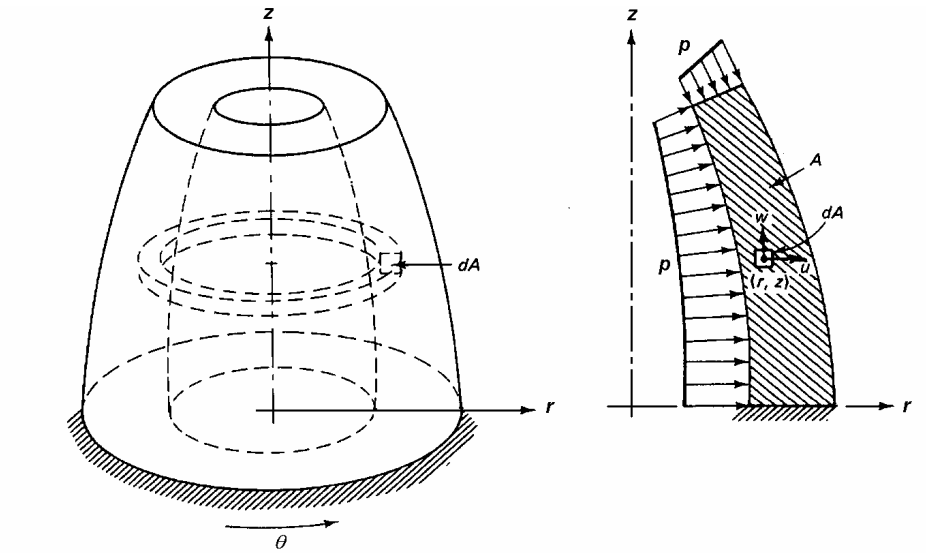


Fig. 9.9

9.5.1 Relaţiile între deformaţii specifice şi deplasări

Se consideră un element de volum (fig. 9.10) detaşat din corp prin două plane axiale şi două plane perpendiculare pe axa de simetrie.

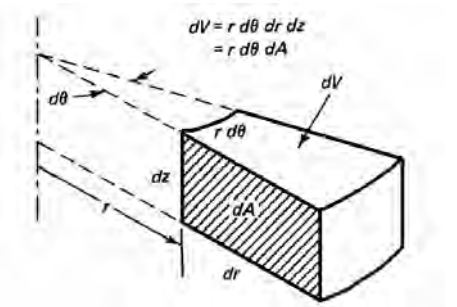


Fig. 9.10

Sub acțiunea sarcinilor exterioare şi a câmpului de temperaturi, elementul se deformează ca în figura 9.11.

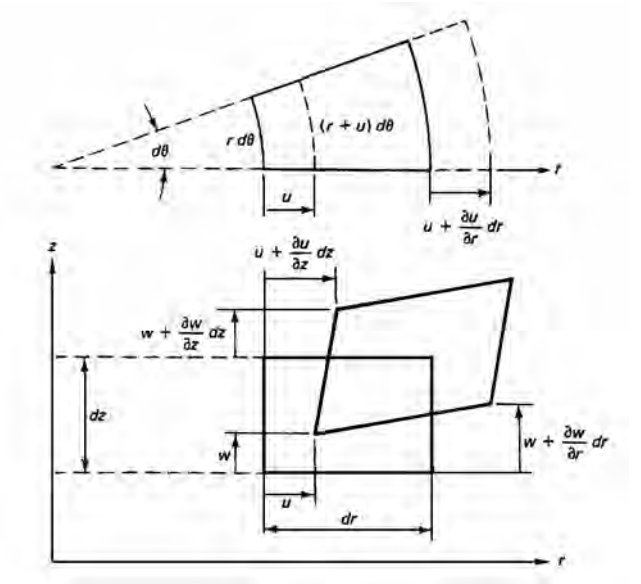


Fig. 9.11

Se stabilesc următoarele relații între deformații specifice şi deplasări

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}. \tag{9.64}$$

Se defineşte vectorul deformațiilor specifice mecanice

$$\{\varepsilon\} = \lfloor \varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \varepsilon_t \rfloor^T. \tag{9.65}$$

Vectorul deformațiilor specifice termice este

$$\{\varepsilon_T\} = \lfloor \alpha T \quad \alpha T \quad 0 \quad \alpha T \rfloor^T, \tag{9.66}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară şi T este variația temperaturii.

9.5.2 Relațiile între tensiuni şi deformații specifice

Se defineşte vectorul tensiunilor

$$\{\sigma\} = \lfloor \sigma_r \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \sigma_t \rfloor^T. \tag{9.67}$$

Relațiile între tensiuni şi deformații specifice se scriu matricial sub forma (9.6)

$$\{\sigma\}=[D]\left(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_T\}\right), \tag{9.68}$$

în care $[D]$ este matricea de rigiditate a materialului

$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}. \tag{9.69}$$

9.5.3 Energia potențială totală

Pentru elementul din figura 9.10, energia de deformație este

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_A \left(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_T\}\right)^T[D]\left(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_T\}\right) r\,dA\,d\theta \ ,$$

sau

$$U=2\pi\left(\frac{1}{2}\int_A \left(\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}-2\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon_T\}+\{\varepsilon_T\}^T[D]\{\varepsilon_T\}\right) r\,dA\right). \tag{9.70}$$

Dacă asupra corpului axial-simetric acționează sarcini volumice şi sarcini distribuite liniar în lungul generatoarei şi razei secțiunilor din capete, energia potențială totală este

$$\Pi=U-2\pi\left(\int_A \{u\}^T\{f\}\,r\,dA+\int_\ell \{u\}^T\{p\}\,r\,d\ell\right), \tag{9.71}$$

unde

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix},\quad \{p\}=\begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix},\quad \{u\}=\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}. \tag{9.72}$$

9.5.4 Modelarea cu elemente CST axial-simetrice

Suprafața generatoare (haşurată în figura (9.9)) este împărțită în elemente triunghiulare, ca în figura 9.12 (Chandrupatla & Belegundu, 1991). Deşi fiecare

element este complet definit de suprafața din planul rz, elementele sunt de fapt inelare, obținute prin rotirea triunghiului în jurul axei *z* (fig. 9.13).

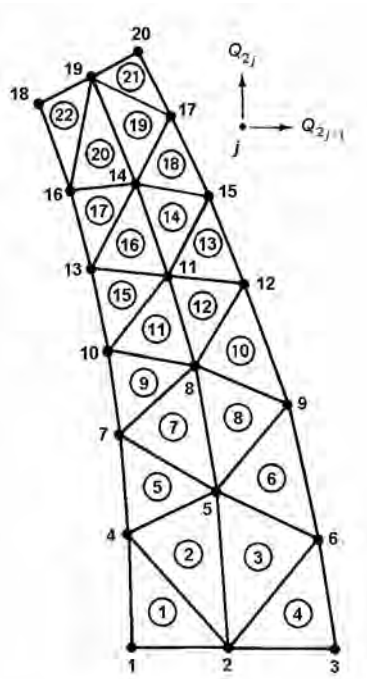


Fig. 9.12

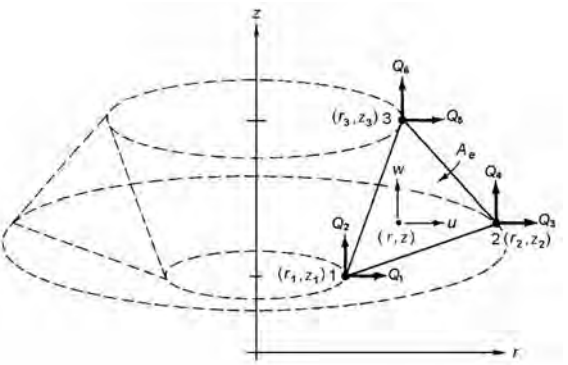


Fig. 9.13

În continuare, elementele triunghiulare sunt elemente CST (cu deformații specifice constante) așa cum au fost prezentate în §9.3, cu deosebirea că se înlocuiesc coordonatele *x* și *y* prin *r* și *z*. Pentru a înlesni generalizarea la elemente cu mai multe noduri, se va utiliza formularea izoparametrică.

9.5.5 Coordonate naturale

Se consideră elementul triunghiular din figura 9.14, *b*. Nodurile locale se notează convenabil $1, 2, 3$, numerotate în sens trigonometric. Coordonatele nodului *i* în sistemul de coordonate global sunt (r_i, z_i).

Fiecărui element triunghiular i se poate ataşa un sistem de *coordonate naturale*, care pot fi reprezentate în coordonate carteziene în planul $\{\xi, \eta\}$, numit *plan de referință*. În planul de referință coordonatele ξ şi η variază de la 0 la 1 (fig. 9.14, *a*) iar elementele triunghiulare devin un triunghi dreptunghic isoscel, numit *element de referință*. Se poate considera că fiecare element triunghiular din planul $\{r, z\}$ este generat de elementul de referință din planul $\{\xi, \eta\}$.

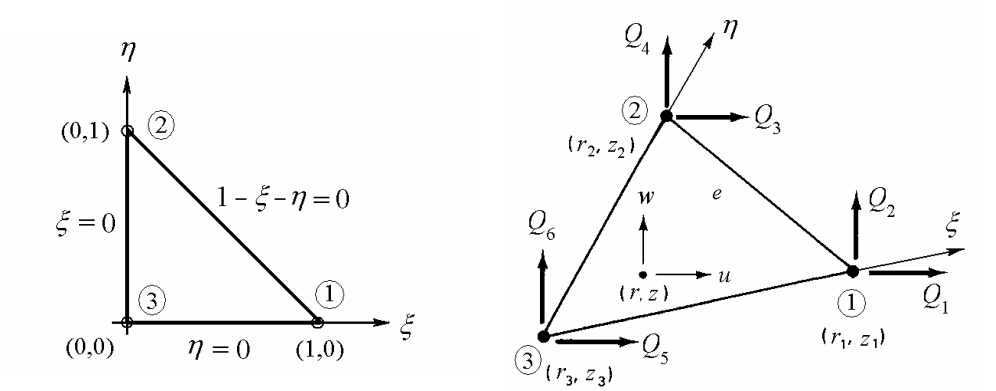


Fig. 9.14

9.5.6 Funcțiile de formă

Coordonatele unui punct din interiorul elementului pot fi exprimate în funcție de coordonatele nodale prin relațiile

$$\begin{aligned} r &= N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3, \\ z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 . \end{aligned} \tag{9.73}$$

În formă matricială

$$r = \lfloor N \rfloor \left\{ r^e \right\} = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \lfloor N \rfloor \left\{ r^e \right\}, \tag{9.74, a}$$

$$z = \lfloor N \rfloor \left\{ z^e \right\} = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \lfloor N \rfloor \left\{ z^e \right\}. \tag{9.74, b}$$

În relațiile (9.73) şi (9.74) funcțiile de formă au expresiile

$$N_1 = \xi , \quad N_2 = \eta , \quad N_3 = 1 - \xi - \eta . \tag{9.75}$$

9.5.7 Câmpul de deplasări

În formularea izoparametrică, deplasările unui punct din interiorul elementului se exprimă în funcție de valorile deplasărilor nodale prin aceleaşi funcții de interpolare ca cele care definesc geometria elementului. Dacă *u* şi *w* sunt componentele deplasării unui punct situat la (r, z), atunci (fig. 9.14, *b*)

$$\begin{aligned} u &= N_1 Q_1 + N_2 Q_3 + N_3 Q_5 , \\ w &= N_1 Q_2 + N_2 Q_4 + N_3 Q_6 . \end{aligned} \tag{9.76}$$

Matricial, relațiile (9.76) se scriu sub forma (9.52)

$$\{u\} = [N]\{Q^e\}, \tag{9.77}$$

unde vectorul deplasărilor nodale ale elementului (9.50) este

$$\{Q^e\} = \lfloor Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \rfloor^T , \tag{9.78}$$

deci relația (9.77) are forma

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}. \tag{9.79}$$

Deformațiile specifice se exprimă în funcție de deplasările nodale prin relația

$$\{\varepsilon\} = [\partial][N]\{Q^e\} = [B]\{Q^e\}, \tag{9.80}$$

unde matricea $[B]$ conține derivatele funcțiilor de formă în raport cu coordonatele fizice *r* şi *z*. Aceasta necesită o transformare de coordonate.

9.5.8 Transformări între coordonatele naturale şi coordonatele fizice

Transformarea operatorilor diferențiali este definită de relațiile

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}, \tag{9.81}$$

unde matricea Jacobiană

$$\begin{aligned}\left[J\right]&=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\end{matrix}\right\}\lfloor r\quad z\rfloor=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\end{matrix}\right\}\left\lfloor\lfloor N\rfloor\left\{r^e\right\}\ \lfloor N\rfloor\left\{z^e\right\}\right\rfloor=\\ &=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\lfloor N\rfloor\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\lfloor N\rfloor\end{matrix}\right\}\left\lfloor\left\{r^e\right\}\ \left\{z^e\right\}\right\rfloor,\end{aligned}\tag{9.82}$$

$$\left[J\right]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1&z_1\\r_2&z_2\\r_3&z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1-r_3&z_1-z_3\\r_2-r_3&z_2-z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{13}&z_{13}\\r_{23}&z_{23}\end{bmatrix}.\tag{9.83}$$

Analog, relația inversă este

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial r}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{matrix}\right\}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial r}&\dfrac{\partial\eta}{\partial r}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial z}&\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\end{matrix}\right\}=\left[j\right]\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\end{matrix}\right\},\tag{9.84}$$

unde $\left[j\right]=\left[J\right]^{-1}$ este inversa matricii Jacobiene

$$\left[j\right]=\frac{1}{\det\left[J\right]}\begin{bmatrix}z_{23}&-z_{13}\\-r_{23}&r_{13}\end{bmatrix}\tag{9.85}$$

în care

$$\det\left[J\right]=r_{13}z_{23}-r_{23}z_{13}.\tag{9.86}$$

Valoarea absolută a lui $\det\left[J\right]$ este egală cu dublul ariei elementului iar

$$\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z=\det\left[J\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.\tag{9.87}$$

9.5.9 Matricea $\left[B\right]$

Înlocuind în (9.64) şi utilizând (9.76)

$$\begin{aligned}u&=\xi Q_1+\eta Q_3+\left(1-\xi-\eta\right)Q_5,\\ w&=\xi Q_2+\eta Q_4+\left(1-\xi-\eta\right)Q_6,\end{aligned}\tag{9.88}$$

se obține

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{z_{23}(Q_1-Q_5)-z_{13}(Q_3-Q_5)}{\det[J]} \\ \dfrac{-r_{23}(Q_2-Q_6)+r_{13}(Q_4-Q_6)}{\det[J]} \\ \dfrac{-r_{23}(Q_1-Q_5)+r_{13}(Q_3-Q_5)+z_{23}(Q_2-Q_6)-z_{13}(Q_4-Q_6)}{\det[J]} \\ \dfrac{N_1q_1+N_2q_2+N_3q_3}{r} \end{Bmatrix}. \quad (9.89)$$

În formă matricială, relația (9.89) se poate aduce la forma (9.80), unde matricea care exprimă deformațiile specifice în funcție de deplasările nodale ale elementului este

$$[B]=\begin{bmatrix} \dfrac{z_{23}}{\det[J]} & 0 & \dfrac{z_{31}}{\det[J]} & 0 & \dfrac{z_{12}}{\det[J]} & 0 \\ 0 & \dfrac{r_{32}}{\det[J]} & 0 & \dfrac{r_{13}}{\det[J]} & 0 & \dfrac{r_{21}}{\det[J]} \\ \dfrac{r_{32}}{\det[J]} & \dfrac{z_{23}}{\det[J]} & \dfrac{r_{13}}{\det[J]} & \dfrac{z_{31}}{\det[J]} & \dfrac{r_{21}}{\det[J]} & \dfrac{z_{12}}{\det[J]} \\ \dfrac{N_1}{r} & 0 & \dfrac{N_2}{r} & 0 & \dfrac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.90)$$

9.5.10 Energia de deformație a elementului

Înlocuind (9.80) în (9.70) se obține

$$U^e = 2\pi\left(\frac{1}{2}\int_{A_e}\left\{Q^e\right\}^T[B]^T[D][B]\left\{Q^e\right\}r\,dA - \right.$$
$$\left. -\int_{A_e}\left\{Q^e\right\}^T[B]^T[D]\{\varepsilon_T\}\,r\,dA+\frac{1}{2}\int_{A_e}\{\varepsilon_T\}^T[D]\{\varepsilon_T\}\,r\,dA\right). \quad (9.91)$$

Ultimul termen din (9.91) este constant şi nu intervine în procesul de minimizare a energiei potențiale totale.

Primul termen din membrul drept are forma

$$U_F^e=\frac{1}{2}\left\{Q^e\right\}^T 2\pi\int_{A_e}[B]^T[D][B]\,r\,dA\left\{Q^e\right\}=\frac{1}{2}\left\{Q^e\right\}^T\left[k^e\right]\left\{Q^e\right\} \quad (9.92)$$

unde

$$\left[k^e\right] = 2\pi \int_{A_e} \left[B\right]^T \left[D\right] \left[B\right] \, r \, dA \tag{9.93}$$

este *matricea de rigiditate* a elementului.

Al doilea termen din membrul drept are forma

$$U_T^e = -\left\{ Q^e \right\}^T 2\pi \int_{A_e} \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{ \varepsilon_T \right\} r \, dA = -\left\{ Q^e \right\}^T \left\{ F_T^e \right\} \tag{9.94}$$

unde

$$\left\{ F_T^e \right\} = 2\pi \int_{A_e} \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{ \varepsilon_T \right\} r \, dA \tag{9.95}$$

este *vectorul forțelor termoelastice* coerente.

9.5.11 Matricea de rigiditate a elementului

În expresia (9.93)

$$\left[k^e\right] = 2\pi \int_{A_e} \left[B\right]^T \left[D\right] \left[B\right] \, r \, dA$$

sub integrală apare r şi în plus linia a patra a matricii $\left[B\right]$ are termeni de forma N_i / r.

În centrul de greutate al triunghiului

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3} \tag{9.96}$$

iar raza centrului de greutate este

$$\bar{r} = \frac{1}{3}\left(r_1 + r_2 + r_3 \right). \tag{9.97}$$

Dacă se notează $\left[\bar{B}^e\right]$ matricea de legătură între deformații specifice şi deplasările nodale calculată în centrul de greutate al triunghiului, atunci matricea de rigiditate (9.93) devine

$$\left[k^e\right] = 2\pi \bar{r} \left[\bar{B}^e\right]^T \left[D\right] \left[\bar{B}^e\right] \int_{A_e} dA$$

sau

$$\left[k^e\right] = 2\pi \bar{r} A^e \left[\bar{B}^e\right]^T [D] \left[\bar{B}^e\right]. \tag{9.98}$$

În relația (9.98)

$$A^e = \frac{1}{2} \left|\det[J]\right| \tag{9.99}$$

iar coeficientul $2\pi \bar{r} A^e$ reprezintă volumul elementului inelar din figura 9.13.

O metodă mai laborioasă constă în înlocuirea razei în (9.93) prin expresia $r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3$.

9.5.12 Vectorul forțelor termoelastice

Înlocuind (9.97) şi notația $\left[\bar{B}^e\right]$ în expresia (9.95) evaluată în centrul de greutate al triunghiului, rezultă

$$\left\{F_T^e\right\} = 2\pi \bar{r} A^e \left[\bar{B}^e\right]^T [D] \left\{\bar{\varepsilon}_T^e\right\} \tag{9.100}$$

unde $\left\{\bar{\varepsilon}_T^e\right\}$ se calculează pe baza variației temperaturii în centrul de greutate.

9.5.13 Asamblarea şi calculul tensiunilor

Matricea globală de rigiditate şi vectorul global al forțelor nodale se asamblează aşa cum s-a prezentat în § 9.1.7, pe baza matricilor şi vectorilor elementelor, utilizând informația privind conectarea elementelor.

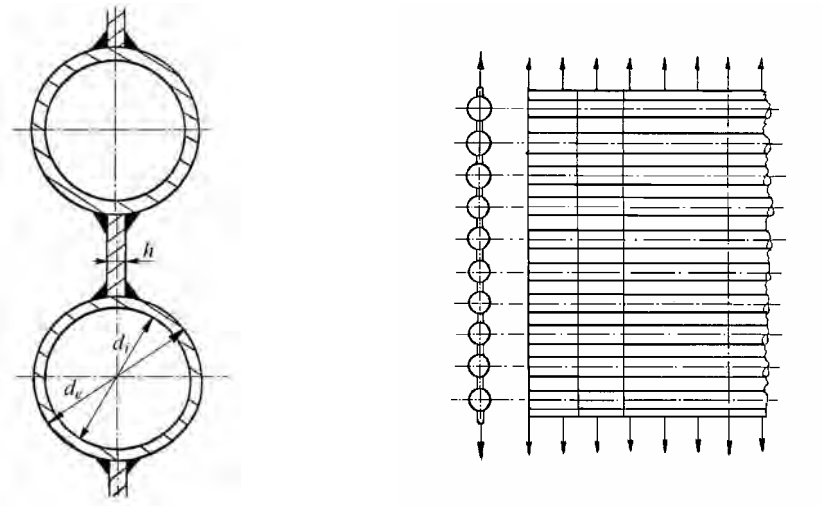
Tensiunile se calculează apoi cu relația

$$\{\sigma\} = [D] \left[\bar{B}^e\right] \left\{Q^e\right\} - [D] \left\{\bar{\varepsilon}_T^e\right\}. \tag{9.101}$$

9.6 Pereți membrană la cazane de abur

Pereții membrană din construcția cazanelor de abur moderne sunt formați din țevi paralele şi platbenzi îmbinate prin cordoane de sudură (fig. 9.15). La pereții membrană suspendați (cazane atârnate) cu țevi în spirală, înclinarea țevilor este de maximum 15^o. La construcțiile autoportante, țevile sunt rezemate jos într-

un tambur colector. În interiorul țevilor circulă apa sau aburul, în timp ce suprafața exterioară este încălzită asimetric, prin radiație și convecție, de la gazele de ardere.



a *b*

Fig. 9.15

Într-un cazan tipic de peste 1000 tone abur/oră țevile lucrează la presiuni interioare până la 200 at şi temperaturi de supraîncălzire a aburului de $540^{o}\mathrm{C}$. Țevile au diametrul exterior $d_e = 50\ \mathrm{mm}\ (32\ \mathrm{mm})$ şi diametrul interior $d_i = 26\ \mathrm{mm}\ (23\ \mathrm{mm})$, iar platbenzile au grosimea $h = 6\ \mathrm{mm}$.

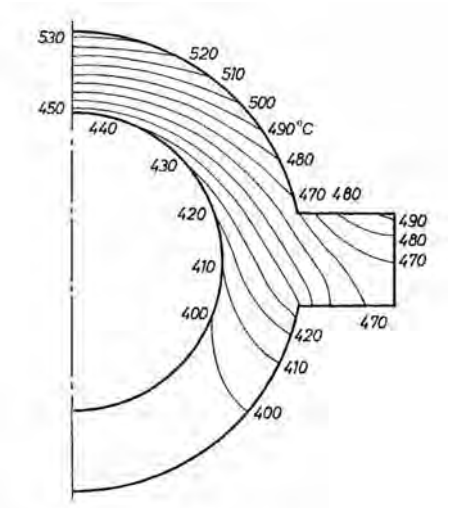


Fig. 9.16

În continuare se redau câteva rezultate obținute de Di Pasquantonio şi Macchi (1975) pentru un perete membrană format din țevi cu diametrul interior $d_i = 20{,}5$ mm , din material A213 ASTM, străbătute de apă la 395^{o}C cu presiunea $25{,}5$ MPa .

Analiza a fost efectuată pentru o jumătate din secțiunea unei țevi şi a platbenzii, considerând o stare plană de deformații specifice. Condițiile de rezemare au fost alese astfel încât, în stare solicitată, linia de secționare a platbenzii (axa de simetrie a membranei, perpendiculară pe planul ecranului) să rămână paralelă cu poziția inițială.

Distribuția temperaturii obținută prin calcul este redată în fig. 9.16. Se remarcă asimetria câmpului de temperaturi care face dificilă orice abordare analitică.

În figura 9.17 sunt reprezentate curbele de valori constante ale tensiunilor termice echivalente (von Mises). Pentru comparație, în figura 9.18 se prezintă curbele de valori constante ale tensiunilor echivalente produse numai de presiunea interioară. Se observă că tensiunile termice sunt mai mari decât tensiunile mecanice.

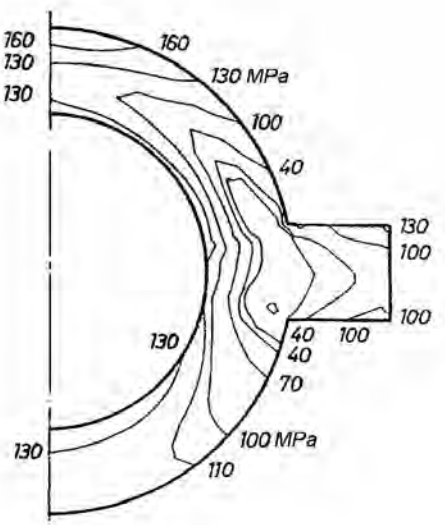


Fig. 9.17

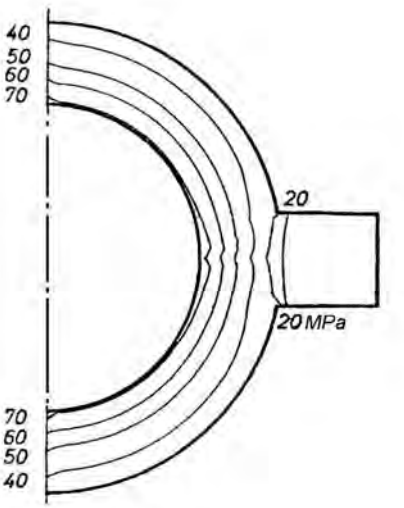


Fig. 9.18

În figura 9.19 se redau curbele de valori constante ale tensiunilor echivalente totale (termice + mecanice). Se observă că aceste tensiuni sunt aproape identice cu cele termice, deci contribuția tensiunilor produse de presiunea interioară la valoarea tensiunilor totale este mică.

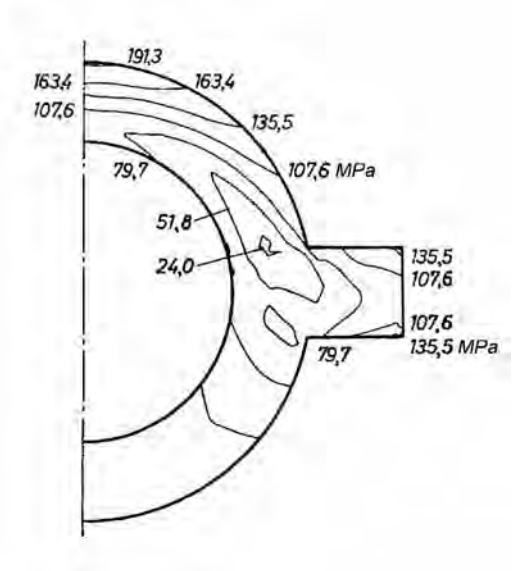


Fig. 9.19

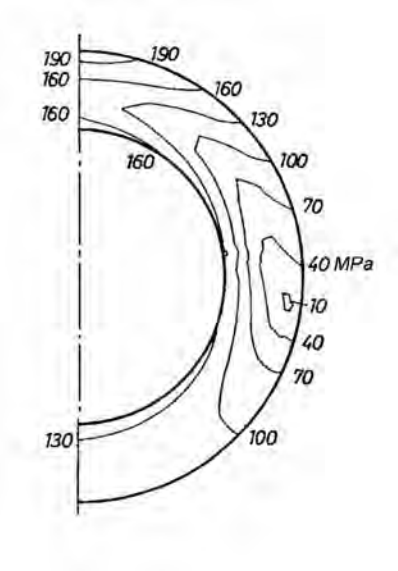


Fig. 9.20

În figura 9.20 se prezintă tensiunile termice echivalente la o țeavă fără aripioare. Distribuția acestora este foarte apropiată de cea din peretele membrană.

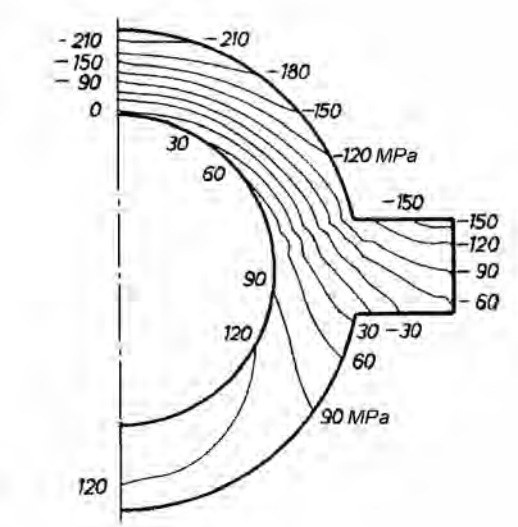


Fig. 9.21

În figura 9.21 se redau curbele de valori constante ale tensiunilor termice longitudinale. Aceste tensiuni au valori absolute mai mari decât celelalte, dar sunt de compresiune.

În figura 9.22 se redau diagramele tensiunilor circumferențiale termice într-un perete membrană din țevi cu $d_e = 60$ mm, $d_i = 50$ mm, și platbenzi cu grosimea $h = 6$ mm (IPB, 1981).

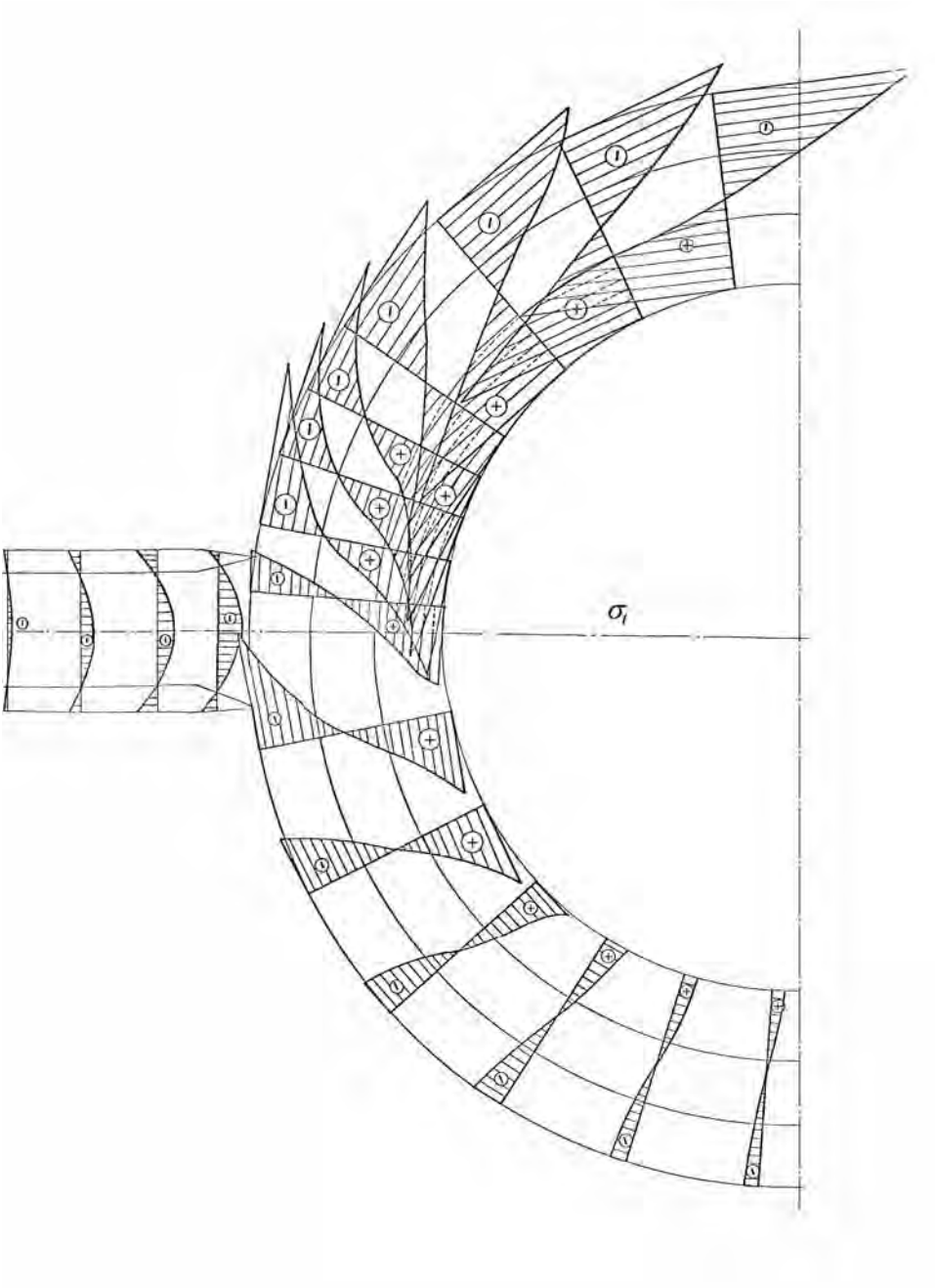


Fig. 9.22

Tensiunile maxime $\sigma_{t_{\max}} = 62{,}5\ \text{MPa}$ apar la interior, în lungul generatoarei dinspre sursa de căldură.

În alt exemplu de simulare numerică (Effenberger, 2000), pentru un perete membrană din țevi cu $d_e = 38\ \text{mm}$ şi $d_i = 28\ \text{mm}$, s-au calculat tensiunile termice circumferențiale. În figura 9.23 se prezintă diagramele de variație ale acestor tensiuni în funcție de poziția unghiulară, la interiorul şi exteriorul țevii.

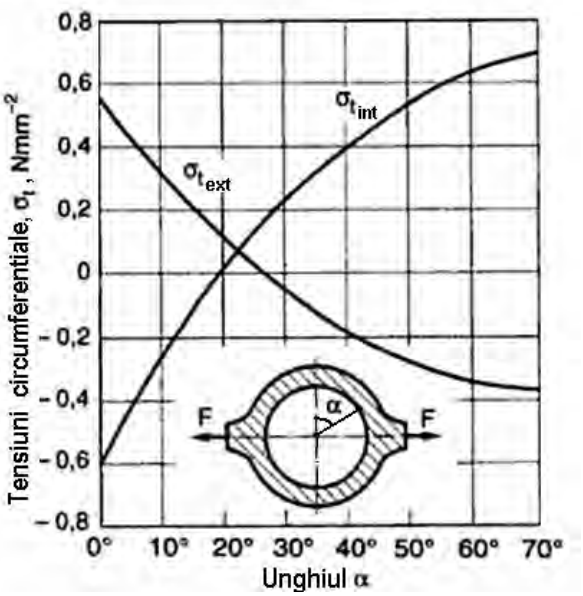


Fig. 9.23

În figura 9.24 se arată aceleaşi diagrame raportate la secțiunea transversală a unui modul de perete membrană. Diagrama din partea de jos corespunde de fapt variației pe grosime a tensiunilor în secțiunea diametral opusă.

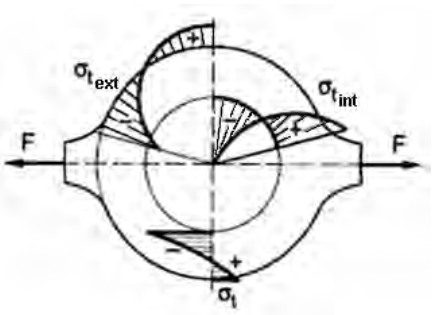


Fig. 9.24

Într-un studiu relativ recent (Sarma, Pawel & Singh, 2005) țevile şi platbenzile au fost modelate cu elemente de înveliş patrulatere cu 8 noduri, iar sudurile între platbenzi şi țevi – cu elemente prismatice triunghiulare pătratice cu 15 noduri (fig. 9.25).

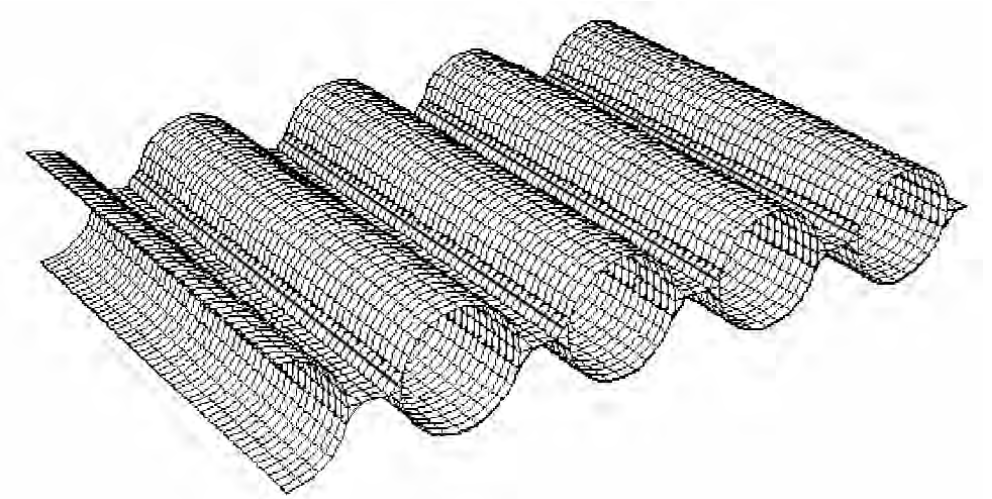


Fig. 9.25

Calculele se efectuează conform recomandărilor *Codului ASME pentru cazane şi recipiente sub presiune*, secțiunea 8, partea 1 şi a subparagrafului *NB* 3200 referitor la *proiectarea prin analiză* (spre deosebire de *proiectarea prin formule*).

Bibliografie

Bibliografie generală

1. Birger, I. A. şi Shorr B. F. (editori), *Temperaturnaia procinosti detali maşin*, Maşinostroenie, Moscova, 1975.

2 Boley, B. A. şi Weiner, J. H., *Theory of thermal stresses*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960, 1985; Dover, 1997.

3. Frolov, K. V., Izrailev, Iu. L., Makhutov, N. A., Morozov, E. M. şi Parton, V. Z., *Thermal stresses and strength of turbines: Calculation and design*, 2nd ed., (Hetnarski, R. B., editor), Hemishere Publ., New York, 1990 (trad. din l. rusă).

4. Gatewood, B. E., *Thermal stresses*, McGraw-Hill, New York, 1957.

5. Hetnarski, R. B. şi Eslami, M. R., *Thermal stresses. Advanced theory and applications*, Springer, Berlin, 2008.

6. Melan, E. şi Parkus, H., *Wärmespannungen infolge stationärer Temperatur felder*, Springer, Wien, 1953.

7. Noda, N., Hetnarski, R. B. şi Tanigava, Y., *Thermal stresses*, 2nd ed., Taylor & Francis, New York, 2003.

8. Nowacki, W., *Thermoelasticity*, Addison Wesley, Reading, MA, 1962.

9. Nowinski, J. L., *Theory of thermoelasticity with applications*, Sijthoff-Noordhoff, Groningen, 1978.

10. Ponomariov, S. D. ş.a., *Calculul de rezistență în construcția de maşini*, 3 vol., Editura tehnică, Bucureşti, 1964 (trad. din l. rusă).

11. Popa, B., Mădărăşan, T., Bățagă, N. şi Adameşteanu, I., *Solicitări termice în construcția de maşini*, Editura tehnică, Bucureşti, 1978.

12. Roark, R. J., *Formulas for stress and strain*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1954.

13. Tauchert, Th. R. şi Hetnarski, R. B., *Bibliography on thermal stresses*, Hemisphere, 1986.

14. Timoshenko, S. şi Goodier, J. N., *Theory of elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1951.

15. Traupel, W., *Thermische Turbomaschinen*, vol. 2, Springer, Berlin, 2000.

Capitolul 1

1.1 Almansi, E., *Use of the stress function in thermoelasticity*, Mem. Reale Accad. Sci. Torino, Series 2, vol. 47, 1897.

1.2 Burgreen, D., *Elements of thermal stress analysis*, C. P. Press, Jamaica, N. Y., 1971.

1.3 Duhamel, J.-M.-C., *Second mémoire sur les phénomènes thermo-mécaniques*, Journal de l'École Polytechnique, tome 15, cahier 25, p. 1-57, 1837.

1.4 Duhamel, J.-M.-C., *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par le changements de temperature dans les corps solides*, Mém. de l'Inst. France, vol.15, p. 440-498, 1838.

1.5 Fourier, J. B. J., *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, Paris, 1822.

1.6 Föppl, A., *Vorlesungen über technische Mechanik*, vol. 5, *Die wichtigsten Lehren der höheren Elatizitätstheorie*, Teubner, Leipzig, 1907.

1.7 Grindei, I., *Termoelasticitate*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1967.

1.8 Navier, C. L. M. H., *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du movement des corps solides élastiques*, Mém. Acad. Sci., Paris, tome VII, p. 375-393, 1827.

1.9 Neumann, F. E., *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper*, Teubner, Leipzig, 1885.

1.10 Nowinski, J. L., *Theory of thermoelasticity with applications*, Sijthoff-Noordhoff, Groningen, 1978.

1.11 Parkus, H., *Instationäre Wärmespannungen*, Springer, Wien, 1959.

1.12 Parkus, H., *Termoelasticity*, Springer, New York, 1976.

1.13 Stodola, A., *Steam and Gas Turbines*, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1927.

1.14 Tedone, O., *Allgemeine Theoreme der mathematischen Elatizitätslehre (Integrationstheorie*), Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. 4, Part D, p. 55-124, 1906.

1.15 Voigt W., *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, Berlin, 1910.

Capitolul 2

2.1 Mott, R. L., *Applied strength of materials*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

2.2 Umanski, A. A. (red.), *Sbornik zadaci po soprotivleniiu materialov*, Nauka, Moscova, 1973.

2.3 Zaslavski, B. V., *Kratkii kurs soprotivleniia materialov*, Maşinostroenie, Moscova, 1986.

Capitolul 3

3.1 ∗∗∗ ASTM B106-08, *Standard Test Methods for Flexivity of Thermostat Metals*.

3.2 ∗∗∗ ASTM Standard B388, *Standard Specification for Thermostat Metal Sheet and Strip*.

3.3 Barlekette, E. S., *Thermoelastic stresses in beams*, Journal of Applied Mechanics, vol.27, p.465-473, Sept 1960.

3.4 Birger, I. A., *Bare cu proprietăţi elastice variabile, încălzite neuniform* (în l. rusă), Rascetî na procinosti, vol. 7, Maşghiz, Moscova, p. 76-109, 1961.

3.5 ∗∗∗ DIN 1715, Part 1, *Thermostat Metals*, 1983.

3.6 Feodosiev, V. I., *Izbrannîe zadaci i voprosî po soprotivleniiu materialov*, Nauka, Moscova, 1967.

3.7 Gieck, K. şi Gieck, R., *Engineering formulas*, McGraw-Hill, New York, 1990.

3.8 Guyer, E. C. (ed.), *Handbook of applied thermal design*, McGraw-Hill, New York, 1989.

3.9 Massonnet, Ch., *Résistance des matériaux*, ed. 2a, Dunod, Paris, 1968.

3.10 Rivello, R. M., *Theory and analysis of flight structures*, McGraw-Hill, New York, 1969.

3.11 Schnell, W., Gross D. şi Hauger, W., *Technische Mechanik*, Band 2, *Elastostatik*, 7. Auflage, Springer, Berlin, 2002.

3.12 Stephenson, R. J., Moulin, A. M. şi Welland, M. E., *Temperature measurement*, în *The measurement, instrumentation and sensors handbook*, (J. G. Webster, ed.), CRC Press, p. 964-976, 1999.

3.13 Timoshenko, S. P., *Analysis of bi-metal thermostats*, J. Opt. Soc. of America, vol. 11, no.3, p. 233-255, 1925.

3.14 Timoshenko, S. P., *The collected papers*, McGraw-Hill, New York, 1953.

Capitolul 4

4.1 Benham, P. P. şi Hoyle, R. (editori), *Thermal stress*, Sir Isaac Pitman & Sons, London, 1964.

4.2 Fridman, Y. B., *Strength and deformation in nonuniform temperature fields*, Consultants Bureau, New York, 1964.

4.3 Goodier, J. N., *On the integration of the thermo-elastic equations*, Philosophical Magazine, Series 7, vol. 23, nr. 157, p. 1017-1032, May 1937.

4.4 Goodier, J. N., *Formulas for overall thermoelastic deformations*, Proc. 3rd U. S. Nat. Congress of Applied Mechanics, Brown University, 1958.

4.5 Kovalenko, A. D., *The current theory of thermoelasticity*, International Applied Mechanics, vol. 6, nr. 4, p. 355-360, April 1970.

4.6 Sadd, M. H., *Elasticity*, Elsevier, Amsterdam, 2005.

Capitolul 5

5.1 Boiarşinov, S. V., *Osnovî stroitelinoi mehaniki maşin*, Maşinostroenie, Moscova, 1973.

5.2 Boresi, A. P. şi Chong, K. P., *Elasticity in engineering mechanics*, 2nd ed., Wiley, New York, 2000.

5.3 **** Bulletin on formulas and calculations for casing, tubing, drill pipe and line pipe properties*, A. P. I. Bulletin 5C3, 5th ed., July 1989.

5.4 Goodier, J. N., *Thermal stress and deformation*, Journal of Applied Mechanics, vol.24, nr.3, p. 467-474, Sept 1957.

5.5 Hearn, E. J., *Mechanics of materials*, 2 vol., ed. 3a, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1997.

5.6 Kaceanov, L. M., *Termoelasticitatea şi termoplasticitatea*, Cap.5, în *Rezistenţă, stabilitate şi vibraţii* (red. I. A. Birger şi Ia. G. Panovko), vol.1, Maşinostroenie, Moscova, p. 114-131, 1968 (în l. rusă).

5.7 Kishii, T., *Methods of thermal stress calculation for circular cylinder and disks*, Journal of the Ceramic Society of Japan, vol.101, no.8, p. 932-935, 1993.

5.8 Lamé, G. şi Clapeyron, B. P. E., *Mémoire sur l'équilibre interieur des corps solids homogenes*, Mém. Acad. Sci. Paris, vol. 4, p. 465, 1833.

5.9 Ugural, A. C. şi Fenster, S. K., *Advanced strength and applied elasticity*, 3rd ed., PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

Capitolul 6

6.1 Bertilsson J.-E. şi Berg U., *Steam Turbine Rotor Reliability*, EPRI Workshop on Rotor Forgings for Turbines and Generators, Palo Alto, California, Sept 13-17, 1980.

6.2 Bertilsson, J.-E., Faber, G. şi Kuhnen, G., *50 years of welded turbine rotors*, Brown Boveri Review, vol.68, nr.12, p. 467-473, 1981.

6.3 Berg, U., Melton, K.N. şi Heiberger, D., *Determining and evaluating the service life of steam turbine components*, Brown Boveri Review, vol.68, nr.12, p. 486-496, 1981.

6.4 Biezeno, C. B. şi Grammel, R., *Engineering dynamics*, vol. 3, *Steam turbines*, Blackie & Son Ltd., Londra, 1954 (trad. din l. germană).

6.5 Birger, I. A. şi Demianuşko, I. V., *Întinderea axial-simetrică a plăcilor*, în *Rezistență, stabilitate şi vibrații* (red. I.A. Birger şi Ia.G. Panovko), vol. 1, Maşinostroenie, Moscova, p. 586-596, 1968 (în l. rusă).

6.6 Demianuşco, I. V. şi Birger, I. A., *Rascet na procinosti vraşciaiuşcihsia diskov*, Maşinostroenie, Moscova, 1978.

6.7 Donath, M., *Die Berechnung rotierender Scheibe und Ringe nach einem neuen Verfahren*, Springer, Berlin, 1929.

6.8 Hohn A., *Les rotors des groses turbines à vapeur*, Revue Brown Boveri, vol.60, nr.9, p. 404-416, 1973.

6.9 Holzer, H., *Die Berechnung der Scheibenräder bei ungleichmässiger Erwärmung*, Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, Heft 1-4, 1915.

6.10 Kostyuk, A. G. şi Frolov, V. V. (edit.), *Turbine cu abur şi cu gaze*, Energoatomizdat, Moscova, 1985 (în l. rusă).

6.11 Malinin, N. N., *Calculul de rezistență, rigiditate şi fluaj al discurilor de turbine*, Cap. 3, în *Calculul de rezistență în construcția de maşini*, vol. 3, Editura tehnică, Bucureşti, p. 113-213, 1964 (trad. din l. rusă).

6.12 Manson S. S., *Determination of elastic stresses in gas-turbine discs*, NACA Report No. 871, 1947.

6.13 Manson S. S., *Direct method of design and stress analysis of rotating discs with temperature gradient*, NACA Report No. 952, 1950.

6.14 Nayak, J., *Computer aided thermal stress analysis of orthotropic rotating disc*, B. Techn. Thesis, National Inst. Technology, Rourkela, India, 2009.

6.15 Stodola, A., *Die Nebenspannungen in rasch umlaufenden Scheibenrädern*, Zeitschrift V. D. I., vol. 51, no. 32, 1907.

6.16 Stodola, A., *Steam turbines*, ed. 2a, New York, 1905 (trad. din l. germană); *Die Dampfturbinen*, Zeitschrift V.D.I., 1903.

6.17 Thompson, A. S., *Stresses in rotating discs at high temperatures*, Journal of Applied Mechanics, vol. 13, no. 1, p. A45-A52, 1946.

6.18 Tumarkin, S., *Methods of stress calculation in rotating disks*, NACA TM 1064, 1944.

Capitolul 7

7.1 Aleck, J., *Thermal stresses in a rectangular plate clamped along an edge*, Journal of Applied Mechanics, vol.16, no.118, 1949.

7.2 *** *Astronautic structures manual*, NASA TM X-73307, vol. 3, 1975.

7.3 Feodosiev, V. I., *Teoria încovoierii plăcilor dreptunghiulare şi aplicaţiile ei tehnice*, Cap.2 în *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. 2, Editura tehnică, Bucureşti, 1963 (trad. din l. rusă), p.123-177.

7.4 Horvay, G., *Thermal stresses in perforated plates*, Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., p.247, 1952.

7.5 Kirchhoff, G. R., *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), vol. 40, p. 51-88, 1850.

7.6 Mansfield, E. H., *The bending and stretching of plates*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1989.

7.7 Marcus, H., *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Springer, Berlin, 1932.

7.8 Maulbetsch, J. I., *Thermal stresses in plates*, Journal of Applied Mechanics, vol. 2, p. A141-A146, 1935.

7.9 Ponomariov, S. D., *Teoria încovoierii plăcilor circulare şi aplicaţiile ei tehnice*, Cap. 1, în *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. 2, Editura tehnică, Bucureşti, 1963 (trad. din l. rusă), p.7-122.

7.10 Thomson, W. (Lord Kelvin) şi Tait, P. G., *Elements of natural philosophy*, vol. 1, part 2, p.188, 1876; 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1879-1883.

7.11 Timoshenko, S. P. şi Woinowsky-Krieger, S., *Teoria plăcilor plane şi curbe*, Editura tehnică, Bucureşti, 1968 (trad. din l. engleză).

7.12 Switzky, H., Forray, M. J. şi Newman, M., *Thermo-structural analysis manual*, Tech. Rept. No. WADD-TR-60-517, vol. 1 şi 2, aug. şi oct. 1962.

Capitolul 8

8.1 Hoffman, R. E. şi Ariman, T., *Thermal and mechanical stresses in nuclear reactor vessels*, Nuclear Engineering and Design, vol.20, no.1, p.31-55, June 1972.

8.2 Wagner, R., *Thermal stresses in open cylindrical shells of arbitrary boundary conditions by a finite strip method*, Proc. Int. Conf. Variational Methods in Engineering, Southampton, 6/87-6/99, 1973.

8.3 Zudans, Z., Yen, T. C. şi Steigelman, W. H., *Thermal stress techniques in the nuclear industry,* American Elsevier Publ. Co., New York, 1965.

Capitolul 9

9.1 Andrieux, S. şi Voldoire, F., *Stress identification in steam generator tubes from profile measurements,* Nuclear Engineering and Design, vol. 158, no.2-3, p. 417-427, Sept 1995.

9.2 **** ASME Boiler & Pressure Vessel Code*, Section VIII, Division 1: *Pressure Vessels*.

9.3 Balaşov, Iu. V., *K rascetu temperaturnîh napriajenii v stenkah teplosilovo oborudovania pri vnezapnom izmenenii temperaturî sredî*, Teploenerghetika, no.7, 1975.

9.4 Bijlaard, P. P., Dohrmann, R. J. şi Duke, J. M., *Thermal stress analysis of nonuniformly heated cylindrical shell and its application to a steam generator membrane wall,* Journal of Engineering for Power, vol.90 , p. 73-81, Jan 1968.

9.5 Brandes, H. şi Martin, H., *Spannungen in Membranwändern durch Wärmebeanspruchung und mechanische Belastung*, VGB-Kraftwerkstechnik, vol.55, Heft 1, 1975.

9.6 Chandrupatla, T. R. şi Belegundu, A. D., *Introduction to finite elements in engineering*, Prentice Hall International, London, 1991.

9.7 **** Colaborare privind elaborarea metodologiei de calcul de rezistență pentru pereții membrană suspendați, cu dezvoltare în spirală, solicitați la eforturi termice şi mecanice mari, pentru cazane de lignit şi şisturi bituminoase*, Contract Nr.258-LCIM/1981, Catedra de Rezistența materialelor, Institutul Politehnic Bucureşti, 1981.

9.8 Craddock, W., *Thermal stresses*, University of Boulder, Colorado, 2006.

9.9 Di Pasquantonio, F. şi Macchi, A., *Temperatures and stresses in a boiler membrane wall tube*, Nuclear Engineering and Design, vol.31, no.2, p. 280-293, Jan 1975.

9.10 Effenberger, H., *Dampferzeugung*, Springer, Berlin, 2000.

9.11 Felippa, C. A., *Thermomechanical effects*, Chapter 29 in Web-posted lectures on *Introduction to finite element methods*, p. 29-1 to 29-11, at `http://caswww.colorado.edu/courses.d/IFEM.d/Home.html`.

9.12 Holms, A. G., *A biharmonic, relaxation method for calculating thermal stress in cooled irregular cylinders,* NACA TN 2434, 1951.

9.13 Hsu, T.-R., *The finite element method in thermomechanics*, Springer, 1986.

9.14 Malinin, N. N. şi Hajinskii, G. M., *Primenenie metoda konecinîh elementov v reşenii osesimetricinîh i ploskih zadaci teorii uprugosti*, Rasciotî na procinosti, vol. 16, Maşinostroenie, Moscova, 1975.

9.15 Nicholson, D. W., *Finite element analysis: Thermomechanics of solids*, CRC Press, Boca Raton, Florida, Jan 2003.

9.16 Weber, R. şi Makinejad, N., *Grundlagen zur analytischen Festigkeitsberechnung von Flossenrohrwänden als anisotrope Flächentragwerke*, Teil II, Mitteilungen der VGB, vol.51, Heft 6, p. 485-491, 1971.

Index

Analiza
– cu elemente finite 209
– termoelastică 2

Bare articulate la capete 16
– concurente 17
– curbe 57
– cu secțiune circulară 43
– – eterogenă 25
– – simetrică 39
– – triunghiulară 42
– – variabilă 31
– drepte 33
– libere la capete 38
– paralele 21
– solicitate
– – axial 7, 215
– – la încovoiere 33
– – la întindere 7
– static nedeterminate 59

Cadre static nedeterminate 59
Câmp termic
– axial nesimetric 90, 97
– axial simetric 84
Cilindri
– axial simetrici 81
– concentrici 110
– cu gaură 82
– cu presiune
– – exterioară 152
– – interioară 47
– groşi 84
– în rotație 140
– – cu gaură 143
– – plini 145
– liberi la capete 86
– plini 98
– subțiri 95
Coeficintul de dilatare termică liniară 8
Condiții 215
– de echilibru la bare 35
– la limită 83, 117, 159, 184, 201
Conversia ecuațiilor 75
Coordonate
– globale 217
– locale 216
– naturale 236
Curbura specifică 52

Deformații specifice termice 7, 44
Dilatarea
– împiedicată 10
– – parțial 29
– liberă 7
Disc
– cu gaură 99
– cu grosimea
– – constantă 118
– – variabilă 127
– fără efecte termice 123
– fixat
– – la exterior 103
– – la interior 104
– în repaus 99
– în rotație 115
– – cu gaură 99, 124
– – plin 125
– plin 105
– subțire 53
Discretizarea 210
Distribuția temperaturii
– arbitrară 84, 100
– liniară 96, 102
– logaritmică 87, 95, 101
– parabolică 107

Ecuația 102
– deplasării radiale 199
– înclinării normalei 158
– lui Lamé 91
– săgeții plăcii 184
Ecuații 15
– constitutive 66

– de compatibilitate 65
– de echilibru 63, 213
– – la cilindri 82
– – la discuri 115
– – la învelişuri 198
– – la plăci 156, 182
– fundamentale 68, 81
– – în deformaţii 68
– – în tensiuni 69
– termoelasticităţii 63
Element finit 209
– CST plan 225
– CST axial-simetric 235
Energia
– de deformaţie 211, 240
– potenţială totală 235

Fenomene termomecanice 1
Forţa lui Kirchhoff 185
Forţe
– axiale 12
– termoelastice 212
Funcţii de formă 210, 237

Geometria suprafeţei mediane 177

Încălzire bruscă 108
Învelişuri cilindrice 193

Lamele bimetalice 46
Legea lui Hooke 9

Matricea $[B]$ 226, 239
Matricea de rigiditate 219, 227, 241
Metoda
– celor două calcule 130
– diferenţelor finite 135
– eforturilor 23
– elementelor finite 209
– lui Duhamel 13, 39, 76
– Mohr-Maxwell 23
– parametrilor iniţiali 203
Modulul de elasticitate longitudinal 8

Pereţi membrană 242
Plăci plane subţiri 152, 225
– circulare 152
– – pline 161
– cu tensiuni de membrană 159
– dreptunghiulare 177
– inelare 164
– încastrate la exterior 168
– încastrate la interior 166
– nesolicitate termic 169
– simplu rezemate 189

Răcire bruscă 108
Relaţii
– între eforturi şi tensiuni 181, 196
– între deplasări şi deformaţii specifice 82, 117, 154, 179, 194, 233
– – la bare drepte 34
– între momente şi tensiuni 155
– între tensiuni şi deformaţii specifice 78, 117, 154, 180, 195, 234
– – la bare drepte 34
– – la cilindri 83
Rotor
– monobloc 146
– sudat 147

Săgeata termică 54
Starea plană
– de deformaţii specifice 71
– de tensiuni 73
Structuri axial-simetrice 233

Tensiuni
– axiale 82
– centrifugale 119
– circumferenţiale 82, 88
– normale 82, 199
– radiale 82, 88
– tangenţiale 64, 90, 155
– termice 1, 56,
Transfer de căldură convectiv 109
Tuburi
– cu pereţi groşi 81
– cu pereţi subţiri 95
– nesolicitate termic 91
– – cu presiune exterioară 94
– – cu presiune interioară 92

Ţevi 95

Vectorul forţelor termoelastice 212, 220, 227, 242